Domácí úkol č. 8 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2015–2016

(8.1) Dokažte, že komplexní čtvercová dolní trojúhelníková matice je normální právě tehdy, když je diagonální.

Nápověda: Pro důkaz těžší implikace můžete postupovat indukcí podle řádu. Spočítejte si prvek na místě $(1,1)$ v součinech A^*A a AA^* a porovnáním ukažte, že první sloupec (kromě prvku a_{11}) je nulový. Pak použijte indukční předpoklad na vhodnou podmatici.

(8.2) Napište výraz

$$V(a,b,c) = 14a^2 + 14b^2 + 17c^2 - 8ab - 4ac - 4bc \ ,$$

ve tvaru $(a,b,c)A(a,b,c)^T$ pro vhodnou symetrickou matici A. Ukažte, že A je pozitivně definitní (na výpočet kořenů polynomu můžete použít software). Z toho vyvoďte, že $V(a,b,c) \geq 0$ pro libovolná reálná čísla a, b, c.

Bonusový problém: Dokažte, že čtvercová komplexní matice A řádu n je normální, právě když $\|A\mathbf{v}\| = \|A^*\mathbf{v}\|$ pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.