

Domácí úkol č. 8 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 23.4.2014 15:30

(8.1) Dokažte, že jediný pozitivně semidefinitní unitární operátor na konečně generovaném komplexním vektorovém prostoru \mathbf{V} je operátor $f = \text{id}_{\mathbf{V}}$. Uveďte příklad neidentického hermitovského unitárního operátoru na prostoru \mathbb{R}^2 .

Nápověda: Využijte spektrální věty.

(8.2) Složením rotace v \mathbb{R}^3 kolem osy $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ o 40° v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček, díváme-li se na rovinu $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ z poloprostoru, do kterého směřuje vektor \mathbf{e}_1) a rotace kolem osy $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ o 20° v kladném směru je opět nějaká rotace. Popište postup, jak určit její osu a úhel (včetně směru). Vypočtete použitím matematického softwaru.

K výpočtu nepoužívejte kvaternionovou reprezentaci (tu jsme nedokázali).

Nápověda: Najděte matici složení vzhledem ke kanonické bázi a postupujte podle analýzy ortogonálních zobrazení z přednášky.

Bonusový problém: Dokažte, že každý pozitivně semidefinitní operátor f na konečně generovaném komplexním vektorovém prostoru \mathbf{V} lze napsat ve tvaru $f = g^*g$ pro nějaký operátor g na prostoru \mathbf{V} .