

## Domácí úkol č. 7 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2015–2016

(7.1) Matice lineárního operátoru  $f$  na  $\mathbb{R}^8$  vzhledem k bázi  $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_8)$  je matice v Jordanově tvaru s dvěma buňkami příslušnými vlastnímu číslu 0 řádů 3 a 5. Pro každé  $i, j \in \mathbb{N}$  určete dimenzi a najděte nějakou bázi prostoru  $(\text{Ker } f^i) \cap (\text{Im } f^j)$ .

(7.2) Označme  $\mathbf{V}$  vektorový prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše 2 s běžnými operacemi. Operátor  $\phi$  na  $\mathbf{V}$  je definovaný vztahem  $\phi(p) = p' - x^2 p''$  ( $p'$  značí derivaci,  $p''$  druhou derivaci). Najděte matici  $J$  v Jordanově tvaru a bázi  $B$  prostoru  $\mathbf{V}$  tak, aby  $[\phi]_B^B = J$ .

**Nápověda:** Začněte tím, že najdete matici operátoru  $\phi$  vzhledem k nějaké bázi prostoru  $\mathbf{V}$ .

**Bonusový problém:** Čtvercová matice  $A = (a_{ij})$  řádu  $n$  je *divná*, pokud  $a_{i+1,i} = 1$  pro  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  a  $a_{i,j} = 0$  pro  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $i \neq j+1$  (tedy poslední sloupec je libovolný, bod diagonálou jsou jedničky a jinde nuly). Ukažte, že každá čtvercová matice nad libovolným tělesem je podobná blokově diagonální matici, jejíž bloky jsou divné. Najděte, jak se divné matice ve skutečnosti nazývají.