

## Domácí úkol č. 6 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2018–2019

(6.1) Uvažujme diskrétní dynamický systém  $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ , kde  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$  a  $A$  je reálná čtvercová matice řádu 3. O matici  $A$  máme následující informace:

- $A$  je singulární.
- Součet prvků v každém sloupci matice  $A$  je 1.
- Součet prvků na diagonále matice  $A$  je 0.

Konverguje pak posloupnost  $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$  pro jakýkoliv počáteční vektor  $\mathbf{x}_0$ ? Konverguje tato posloupnost pro nějaký nenulový počáteční vektor k nulovému vektoru? Konverguje tato posloupnost pro nějaký nenulový počáteční vektor k nenulovému vektoru? (S konvergencí stačí pracovat neformálně.)

**Nápověda:** Podívejte se na to, co říkají podmínky o charakteristickém polynomu matice  $A$ , přičemž použijte výsledek domácího úkolu 4.1. Pak můžete spočítat vlastní čísla a rozmyslet si, co říkají o řešení zadaného dynamického systému.

(6.2) Lineární operátor  $f$  na prostoru  $\mathbf{V} = \text{LO} \{(1, 3, -1, 1)^T, (0, 1, -1, 4)^T\}$  (jde o podprostor prostoru  $\mathbb{R}^4$ ) splňuje

$$f((1, 3, -1, 1)^T) = (1, 2, 0, -3)^T, \quad f((0, 1, -1, 4)^T) = (0, -1, 1, -4)^T$$

Spočítejte  $f^n((7, 17, -3, -9)^T)$ .

**Nápověda:** Začněte tím, že najdete matici  $f$  vzhledem k nějaké bázi prostoru  $\mathbf{V}$ .

### Bonusový problém:

Dokažte, že pro každý operátor na  $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$  se standardním skalárním součinem, který nemá (reálná) vlastní čísla, existuje ortogonální báze  $B$  prostoru  $\mathbf{V}$  taková, že matice  $f$  vzhledem k  $B$  je tvaru

$$[f]_B^B = r \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Dále ukažte, že nelze požadovat, aby  $B$  byla ortonormální.