Domácí úkol č. 3 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2018–2019

(3.1) Odvoďte postup, jak nalézt aproximaci řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (kde A je komplexní matice typu $m \times n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$) metodou nejmenších čtverců, která má navíc mezi všemi takovými aproximacemi nejmenší normu. Použijte odvozený postup na soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) .$$

(3.2) Nechť $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ je regulární reálná matice řádu n. Dokažte, že absolutní hodnota determinantu matice A je menší nebo rovná součinu norem vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ (normy bereme vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu). Pro $n = 3$ interpretujte tuto nerovnost geometricky.

Nápověda: Použijte QR-rozklad. Ukažte, že ortogonální matice má determinant ± 1 a že prvky na diagonále matice R lze odhadnout velikostmi vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$.

Bonusový problém: Ukažte, že každé zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které zachovává skalární součin, je lineární.