

Domácí úkol č. 2 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2015–2016

(2.1) Báze B je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu \langle, \rangle na \mathbb{C}^2 . Určete $\langle (x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T \rangle$.

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1+i \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} i \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

(2.2) Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor spojitých reálných funkcí s definičním oborem $[-1, 1]$ a \langle, \rangle je skalární součin na \mathbf{V} daný vztahem

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg \ .$$

Najděte ortonormální bázi podprostoru $\langle 1, x, x^2 \rangle$ a ortogonální projekci funkce $\sin(x)$ na tento podprostor. (Funkce $1, x, x^2, \sin(x)$ chápeme jako prvky V , tj. restringujeme je na interval $[-1, 1]$.)

Poznámka: K výpočtu integrálů použijte libovolný software, výsledky stačí počítat numericky s rozumnou přesností (např. 2–3 platné cifry).

Bonusový problém: Ukažte, že skalární součin je až na násobek určen kolmostí. Přesněji: Nechť \langle, \rangle_1 a \langle, \rangle_2 jsou dva skalární součiny na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} takové, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ právě když $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2 = 0$. Pak existuje kladné reálné číslo t takové, že $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2$ pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.