Domácí úkol č. 12

Datum odevzdání 20. 5. 2022 do 10:30

(12) V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme útvar U, který vznikne jako průnik kužele

$$H = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : 9x_1^2 + 9x_2^2 - x_3 - 1 = 0\}$$

a roviny

$$V = \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathrm{LO}\left\{(1,0,1)^T, (1,-2,0)^T\right\}.$$

Z postupu vyplyne, že U je elipsa. Vaším úkolem je zjistit přesný tvar a umístění této elipsy, tj. najít střed elipsy a směry a velikosti jejích poloos.

Na výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů a aritmetické operace s vektory *můžete použít software* (třeba WolframAlpha online na `https://www.wolframalpha.com/`). Nepoužívejte ale software na složitější operace (např. na vyřešení celé úlohy).

Nápověda: Můžete postupovat následujícím způsobem.

(a) Rozložte výraz definující H na součet kvadratické formy f_2, lineární formy h a konstanty. Označme A matici f vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^3$ (kde f je symetrická bilineární forma příslušná kvadratické formě f_2), tj. $A = [f]_{K_3}$. Označme Y matici h vzhledem ke kanonické bázi, tj. $Y = [h]^{K_3}$. Nyní máme

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + Y\mathbf{x} - 1 = 0\} \ .$$

(b) Označme g restrikci bilneární formy f na $V \times V$ (tj. g je bilineární forma na $\mathbf{V}$). Najděte bázi $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ prostoru $\mathbf{V}$, která je zároveň ortogonální vzhledem ke g a ortonormální vzhledem k restrikci standardního skalárního součinu na $\mathbf{V}$. Můžete postupovat podle důkazu příslušné věty ve skriptech (tj. vyjádřit g vzhledem k nějaké ortonormální bázi prostoru $\mathbf{V}$ atd.) Najděte matici restrikce h na prostor $\mathbf{V}$ vzhledem k bázi C.

To vám dá vyjádření $[U]_C$ ve tvaru

$$[U]_C = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : ?x_1^2 + ?x_2^2 + ?x_1 + ?x_2 + ? = 0\} \ .$$

(d) Doplněním na čtverec a úpravami zjistěte střed a velikosti poloos, podobně jako v jednom z příkladů ve skriptech. (Střed i směry poloos nakonec vyjádřete v kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.)

Bonusový problém: Nechť f, g jsou symetrické bilineární formy na $\mathbb{R}^n$, $R = [f]_K$, $S = [g]_K$ a g je pozitivně definitní. Označme

$$G = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathrm{Ker}\,(R - \lambda S) \neq 0\}$$

a pro každé $\lambda \in G$ označme B_λ nějakou g-ortonormální bázi $\mathrm{Ker}\,(R - \lambda S)$. Dokažte, že spojení bází B_λ, kde λ probíhá G, je f-ortogonální g-ortonormální báze $\mathbb{R}^3$.