# **Domácí úkol č. 11** k přednášce NMAG101: Lineární algebra 1
zimní semestr 2021/2022

Datum odevzdání pátek 7. ledna 2022, 9.00

**(11.1)** Víme, že $B, C, D$ jsou báze prostoru $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Dále víme, že platí

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad [f]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f]_C^D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Určete $[\mathbf{x}]_D$ (v závislosti na $x_1$ a $x_2$).

**(11.2)** Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi konečně generovanými prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$, $U \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících implikací (obecně) platí:

a) Je-li $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost ve $\mathbf{V}$, pak je $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k))$ lineárně nezávislá posloupnost ve $\mathbf{W}$.

b) Je-li $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k))$ lineárně nezávislá posloupnost v $\mathbf{W}$, pak je $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost ve $\mathbf{V}$.

c) Je-li $U$ podprostorem prostoru $\mathbf{V}$, pak je $f(U) = \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in U\}$ podprostorem prostoru $\mathbf{W}$.

d) Je-li $f(U)$ podprostorem prostoru $\mathbf{W}$, pak je $U$ podprostorem prostoru $\mathbf{V}$.

**Bonusový problém:** Nechť $\mathbf{V}$ je konečně generovaný prostor a $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze $\mathbf{V}$. Nechť $f_1, \dots, f_n$ jsou lineární formy určené vztahy $f_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ukažte, že $B^d = (f_1, \dots, f_n)$ tvoří bázi $\mathbf{V}^d$, je to tzv. *duální báze k* $B$. Dále dokažte, že pro libovolnou formu $f \in \mathbf{V}^d$ platí $[f]^B = ([f]_{B^d})^T$.

Dále nechť $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi konečně generovanými prostory, $B$ je báze $\mathbf{V}$ a $C$ je báze $\mathbf{W}$. Zobrazení $g^d : W^d \to V^d$ definujeme vztahem $g^d(f) = fg$ (pro každé $f \in W^d$). Dokažte, že $g^d$ je lineární zobrazení $\mathbf{W}^d \to \mathbf{V}^d$ a platí

$$[g^d]_{B^d}^{C^d} = ([g]_C^B)^T$$