Domácí úkol č. 10 k přednášce NMAG111: Lineární algebra 1
zimní semestr 2021/2022

Datum odevzdání středa 22. prosince 2021, 15.40

(10.1) O lineárním zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ máme následující informace:

$$f \circ f = f \quad \text{a} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete obraz vektoru $(x, y)^T$ při zobrazení f (v závislosti na x a y).

Nápověda: Z informací jde určit obraz vektorů nějaké báze při zobrazení f a tím určit matici f vzhledem k nějakým bázím. Z toho můžete spočítat matici f vzhledem ke kanonickým bázím.

(10.2) Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem ke kanonickým bázím je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte nějakou bázi B prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ takovou, že matice f vzhledem k B a B je

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Napište si, co požadavek na matici $[f]_B^B$ (z definice) znamená pro vektory báze B. Vzniklé podmínky nejsou přímo soustavy lineárních rovnic, ale jde je na SLR upravit, což početně usnadní řešení.

Bonusový problém: Existuje zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ splňuje $f(x+y) = f(x) + f(y)$, jiné než zobrazení tvaru $f(x) = kx$ (pro $k \in \mathbb{R}$)? Existuje takové spojité zobrazení?