

Domácí úkol č. 10

Datum odevzdání 10. 5. 2022

Na výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů můžete použít software (třeba WolframAlpha).

Uvažujme reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(10.1) Spočítejte singulární rozklady matic A , A^T , AA^T a $A^T A$.

Návod: Nejdřív spočítejte singulární rozklad matice $A^* = A^T$ a poté si uvědomte, že $A = UDV^*$ je singulární rozklad, právě když je $A^* = (UDV^*)^* = VD^*U^*$ singulární rozklad. Z toho snadno odvodíte rozklady i pro AA^* a A^*A , aniž byste znovu počítali vlastní čísla.

(10.2) Najděte reálnou matici B takovou, aby platily rovnosti $ABA = A$, $BAB = B$ a zároveň AB i BA byly symetrické matice.

Návod: Zkuste nejdřív najít obdobnou matici E pro matici D ze singulárního rozkladu matice A . Tj. najděte E tak, aby $DED = D$, $EDE = E$ a zároveň matice ED i DE byly symetrické. Pak zkuste vymyslet, jak se od E dostanete k B .

Bonusový problém: Frobeniova norma matice A typu $m \times n$ je definována vzorcem

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} .$$

Dokažte, že platí

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2} ,$$

kde $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ je seznam singulárních hodnot matice A , každé tolikrát kolik je jeho násobnost.