

## Domácí úkol č. 10 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2018–2019

Nechť  $\mathbf{V}$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{C}$ . Zobrazení  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  nazýváme *seskvilineární forma* na  $\mathbf{V}$ , pokud pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, t \in \mathbb{C}$  platí

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ,  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ ,
- $f(\mathbf{u}, t\mathbf{v}) = tf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ,  $f(t\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{t}f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

Seskvilineární forma se nazývá hermitovská, pokud  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{f(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$  pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Seskvilineární formy jsou zobecněním skalárního součinu nad  $\mathbb{C}$ .

### (10.1)

- Dokažte, že bilineární forma  $f$  na komplexním vektorovém prostoru  $\mathbf{V}$  je antisymetrická právě tehdy, když pro každý vektor  $\mathbf{u} \in V$  platí  $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ .
- Dokažte, že seskvilineární forma  $f$  na komplexním vektorovém prostoru  $\mathbf{V}$  je hermitovská právě tehdy, když je pro každý vektor  $\mathbf{u} \in V$  číslo  $f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  reálné.

**Nápověda:** K důkazu těžší implikace v části (a) si rozepište  $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v})$ , v části (b) ještě  $f(\mathbf{u} + i\mathbf{v}, \mathbf{u} + i\mathbf{v})$ .

Je-li  $f$  symetrická bilineární forma na  $\mathbf{V}$  a  $U \subseteq \mathbf{V}$ , pak  $f$ -ortogonálním doplňkem množiny  $U$  rozumíme množinu

$$U^{\perp f} = \{\mathbf{x} \in V : (\forall \mathbf{u} \in U) f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\} .$$

(Poznámka: Vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  nazýváme  $f$ -ortogonální, pokud  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ;  $f$ -ortogonální doplněk množiny  $U$  tedy tvoří ty vektory z  $\mathbf{V}$ , které jsou  $f$ -ortogonální ke všem vektorům z  $U$ .)

(10.2) Bilineární forma  $f$  na prostoru  $\mathbb{R}^3$  má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$[f]_K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Spočítejte  $f$ -ortogonální doplněk množiny

$$U = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\} .$$

**Nápověda:** Ukažte, že  $f$ -ortogonální doplněk podprostoru  $W = \text{LO}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$  je roven množině všech vektorů, které jsou  $f$ -ortogonální ke všem generátorům  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ . Najděte nějakou množinu generátorů podprostoru  $U$  a použijte účinné pozorování.