

Domácí úkol č. 10 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2015–2016

Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbb{C} . Zobrazení $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ nazýváme *seskvilineární formou*, pokud pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}$ platí

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$,
- $f(\mathbf{u}, t\mathbf{v}) = tf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $f(t\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{t}f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Seskvilineární forma se nazývá hermitovská, pokud $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{f(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Seskvilineární formy jsou zobecněním skalárního součinu nad \mathbb{C} .

(10.1)

- Dokažte, že bilineární forma f na komplexním vektorovém prostoru \mathbf{V} je antisymetrická právě tehdy, když pro každý vektor $\mathbf{u} \in V$ platí $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$.
- Dokažte, že seskvilineární forma f na komplexním vektorovém prostoru \mathbf{V} je hermitovská právě tehdy, když je pro každý vektor $\mathbf{u} \in V$ číslo $f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ reálné.

Nápověda: K důkazu těžší implikace v části (a) si rozepište $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v})$, v části (b) ještě $f(\mathbf{u} + i\mathbf{v}, \mathbf{u} + i\mathbf{v})$.

Je-li f symetrická bilineární forma na \mathbf{V} a $U \subseteq \mathbf{V}$, pak f -ortogonálním doplňkem množiny U rozumíme množinu

$$U^{\perp f} = \{\mathbf{x} \in V : (\forall \mathbf{u} \in U) f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\} .$$

(Poznámka: Vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} nazýváme f -ortogonální, pokud $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$; f -ortogonální doplněk množiny U tedy tvoří ty vektory z \mathbf{V} , které jsou f -ortogonální ke všem vektorům z U .)

(10.2) Bilineární forma f na prostoru \mathbb{R}^3 má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$[f]_K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Spočítejte f -ortogonální doplněk množiny

$$U = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\} .$$

Nápověda: Ukažte, že f -ortogonální doplněk podprostoru $W = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$ je roven množině všech vektorů, které jsou f -ortogonální ke všem generátorům $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$. Najděte nějakou množinu generátorů podprostoru U a použijte účinné pozorování.