

## Domácí úkol č. 9

Datum odevzdání 3. 5. 2022

(9.1) Existuje komplexní hermitovská matice  $A$  řádu 3 splňující následující vztah?

$$f_A((1 + 2i, 3 + 4i, -1 - i)^T) = (-2 + i, -4 + 3i, 1 - i)^T$$

(9.2) Označme výraz

$$V(a, b, c) = 3a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 4ab + 2ac - 3bc.$$

Dokažte, že  $V(a, b, c) \geq 0$  pro libovolná reálná čísla  $a, b, c$ .

**Nápověda:** Použijte následující postup: napište  $V(a, b, c) = (a, b, c)A(a, b, c)^T$  pro vhodnou symetrickou matici  $A$ , ukažte, že  $A$  je pozitivně definitní (na výpočet kořenů polynomu použijte software) a z toho vyvoďte odpověď.

**Bonusový problém:** Dokažte, že čtvercová komplexní matice  $A$  řádu  $n$  je normální, právě když  $\|A\mathbf{v}\| = \|A^*\mathbf{v}\|$  pro libovolný vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ .