Domácí úkol č. 3

Datum odevzdání 15. 3. 2021

(3.1) Nechť $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ je regulární reálná matice řádu n. Dokažte, že absolutní hodnota determinantu matice A je menší nebo rovná součinu norem vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ (normy bereme vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu). Pro $n = 3$ interpretujte tuto nerovnost geometricky.

Nápověda: Použijte QR-rozklad. Ukažte, že ortogonální matice má determinant ± 1 a že prvky na diagonále matice R lze odhadnout velikostmi vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$.

Bonusový problém: Ukažte, že každé zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které zachovává skalární součin, je lineární.

(3.2) Uvažujme dvě báze $C_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ a $C_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a označme B_j Gramovu matici C_j vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu (pro $j = 1, 2$).

- Ukažte, že pokud existuje ortogonální matice Q řádu 3 taková, že $Q\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$, pak $B_1 = B_2$ (tj. báze C_1 a C_2 mají stejné Gramovy matice).
- Ukažte naopak, že pokud $B_1 = B_2$, pak existuje ortogonální matice Q řádu 3 taková, že $Q\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$.

Bonusový problém: Dokažte obecnější tvrzení: Máme-li konečně generovaný reálný vektorový $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle , \rangle$ a dvě stejně dlouhé posloupnosti vektorů $C_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ a $C_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$, pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. C_1 a C_2 mají stejnou Gramovu matici,
2. existuje ortogonální zobrazení $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ takové, že $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.