

## Domácí úkol č. 2

Datum odevzdání: 8. 3. 2021.

(2.1) Báze  $B$  níže je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  na  $\mathbb{C}^2$ . Najděte vzorec pro  $\langle (x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T \rangle$  v závislosti na  $x_1, x_2, y_1, y_2$ .

$$B = \left( \left( \begin{array}{c} i \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 - i \end{array} \right) \right)$$

(2.2) Necht  $\mathbf{V}$  je vektorový prostor spojitých reálných funkcí s definičním oborem  $[1, 4]$  a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  je skalární součin na  $\mathbf{V}$  daný vztahem

$$\langle f, g \rangle = \int_1^4 fg \ .$$

Najděte ortonormální bázi podprostoru  $\text{LO}\{1, x, x^2\}$  a ortogonální projekci funkce  $\sin(x)$  na tento podprostor.

Poznámky:

- Funkce  $1, x, x^2, \sin(x)$  chápeme jako prvky  $V$ , tj. zužujeme je na interval  $[1, 4]$ .
- K výpočtu integrálů použijte libovolný software (např. WolframAlpha), výsledky **počítejte numericky** s rozumnou přesností (např. 2–3 platné cifry).
- Interpretace výsledku je následující: jde o „nejlepší“ aproximaci funkce sinus polynomem stupně  $\leq 2$  na intervalu  $[1, 4]$ . Rozmyslete si, v jakém smyslu „nejlepší“, a případně si zkuste vypočítanou projekci spolu s funkcí sinus vynést na počítači do grafu, abyste je mohli vizuálně porovnat.

**Bonusový problém:** Ukažte, že skalární součin je až na násobek určen kolmostí. Přesněji: Necht  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  jsou dva skalární součiny na konečně generovaném prostoru  $\mathbf{V}$  takové, že pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  platí  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$  právě když  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2 = 0$ . Pak existuje kladné reálné číslo  $t$  takové, že  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2$  pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .