Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení

Verze ze dne 12. května 2022

13 Reálné kvadratické formy a kvadratické útvary

Cíle cvičení:

- Procvičit počítání signatury reálných kvadratických forem.
- Naučit se pro danou reálnou bilineární formu f najít její f-ortogonální bázi, která je zároveň ortogonální bází vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.
- Naučit se geometricky analyzovat kvadratické útvary.

Řešené příklady:

Úloha 13.1. Uvažujme kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$ zadanou vztahem $g_2(x_1, x_2)^T = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$. Určete signaturu symetrické bilineární formy, která kvadratickou formu g vytváří. Určete, pro které vektory je hodnota kvadratické formy nulová, kladná, záporná. (*Návod:* Rozdělte $\mathbb{R}^2$ na tři oblasti.)

Úloha 13.2. Najděte g-ortogonální bázi B reálné symetrické bilineární formy g tak, aby B byla zároveň ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu. Přitom

$$\text{(a)} \quad [g]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad [g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 13.3. Pro kvadratickou formu z předchozí úlohy s maticí

$$[g_2]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

určete útvar popsaný rovnicí $g_2(\mathbf{v}) = 1$.

Úloha 13.4. Popište rovinný útvar s rovnicí

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 5 = 0$$

v prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem.

Návod:

1. Rozdělte rovnici na kvadratickou formu, lineární formu a absolutní člen.
2. Vyjádřete vše vůči vhodné bázi (získané v předchozích příkladech).
3. Upravte tvar na známou rovnici kuželosečky.

4. Popište tvar vzhledem ke kanonickým souřadnicím.

Úloha 13.5. Najděte všechna reálná řešení

(a) rovnice $2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2 = 0$,

(b) nerovnice $2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2 < 0$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 13.6. Nechť h je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s maticí

$$[h]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

vzhledem k nějaké bázi B. Rozhodněte, zda je h skalární součin na $\mathbb{R}^3$.

Úloha 13.7. Najděte g-ortogonální bázi reálné symetrické bilineární formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$, která je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, jestliže

$$[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$