Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení

Verze ze dne 12. května 2022

13 Reálné kvadratické formy a kvadratické útvary

Cíle cvičení:

- Procvičit počítání signatury reálných kvadratických forem.
- Naučit se pro danou reálnou bilineární formu f najít její f-ortogonální bázi, která je zároveň ortogonální bází vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.
- Naučit se geometricky analyzovat kvadratické útvary.

Řešené příklady:

Úloha 13.1. Uvažujme kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$ zadanou vztahem $g_2(x_1, x_2)^T = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$. Určete signaturu symetrické bilineární formy, která kvadratickou formu g vytváří. Určete, pro které vektory je hodnota kvadratické formy nulová, kladná, záporná. (*Návod:* Rozdělte $\mathbb{R}^2$ na tři oblasti.)

Řešení. Určíme matici

$$[g]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

odpovídající symetrické bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi.

Pomocí symetrických úprav najdeme g-ortogonální bázi $M = \big((1,0)^T, (3,1)^T\big)$ a matici

$$[g]_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Matice $[g]_M$ má na diagonále jedno kladné a jedno záporné číslo, tedy g má signaturu $(0, 1, 1)$.

Pro vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ řešme rovnici $g_2(\mathbf{v}) = 0$. Uvážíme-li souřadnice $[\mathbf{v}]_M = (a, b)^T$ tohoto vektoru vzhledem k bázi M, dostaneme

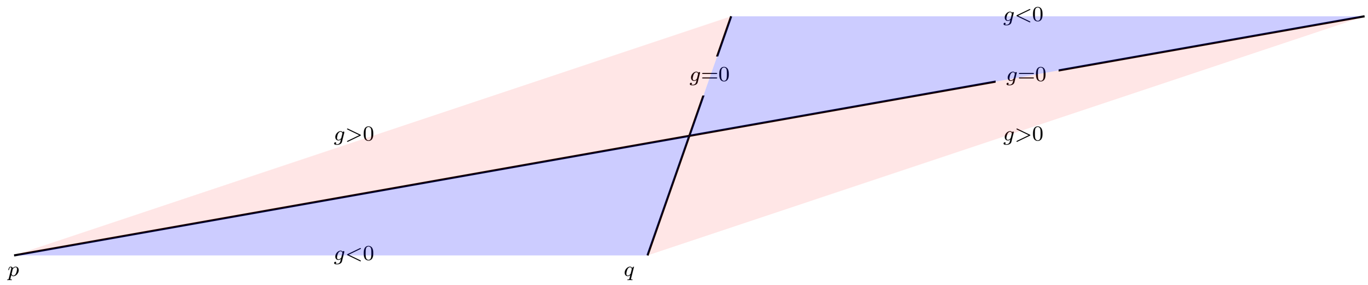
$$0 = g_2(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_M [g_2]_M [\mathbf{v}]_M^T = a^2 - 7b^2.$$

Řešením rovnice $a^2 - 7b^2 = 0$ je dvojice přímek $p\colon a = b\sqrt{7}$ a $q\colon a = -b\sqrt{7}$. Ty jsou generované vektory

$$\mathbf{v}_p = \sqrt{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{7}+3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}65 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{v}_q = -\sqrt{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{7}+3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tyto přímky dělí rovinu $\mathbb{R}^2$ na 4 výseče. Víme, že mimo spočítané přímky musí být hodnoty g kladné nebo záporné. Protože kvadratická forma je spojitá, musí být každá výseč buď celá kladná, nebo celá záporná. To určíme z hodnoty g na libovolném vektoru ve výseči. Spočítáme, že například pro bázové vektory M platí $g_2\big((1,0)^T\big) = g_2\big((-1,0)^T\big) = 1$, $g_2\big((3,1)^T\big) = g_2\big((-3,-1)^T\big) = -7$.

Tedy vektory $(x_1, x_2)^T$ ve výsečích obsahujících vektor $\pm(1,0)^T$ platí $x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 > 0$ a kvadratická forma je v nich kladná. Ve výsečích obsahujících vektor $\pm(3,1)^T$ platí $x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 < 0$ a kvadratická forma je v nich záporná (vizte obrázek níže).



Úloha 13.2. Najděte g-ortogonální bázi B reálné symetrické bilineární formy g tak, aby B byla zároveň ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu. Přitom

$$\text{(a)}\quad [g]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad [g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Matice reálné symetrické bilineární formy je ortogonálně diagonalizovatelná, proto stačí, abychom našli ortonormální bázi, která je složena z vlastních vektorů.

(a) Nejprve najdeme vlastní čísla 6 a 1 a jim příslušné normalizované vlastní vektory $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)^T$ a $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T$. Tedy pro bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ máme

$$[g_2]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Našli jsme bázi prostoru $\mathbb{R}^2$, která je ortonormální a g-ortogonální.

(b) Ihned vidíme vlastní číslo -1 algebraické i geometrické násobnosti 2, pro které spočítáme ortonormální vlastní vektory $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T$ a $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T$. Na ně kolmý vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ už je nutně rovněž vlastním vektorem. Spočítáme, že odpovídající vlastní číslo je 5. Proto je

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T \right)$$

ortonormální bází $\mathbb{R}^3$, která je zároveň g-ortogonální. Matice g vzhledem k této bázi je

$$[g]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Úloha 13.3. Pro kvadratickou formu z předchozí úlohy s maticí

$$[g_2]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

určete útvar popsaný rovnicí $g_2(\mathbf{v}) = 1$.

Řešení. Využijeme znalost nalezené g-ortogonální a ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, kde

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naše forma má vůči B tvar

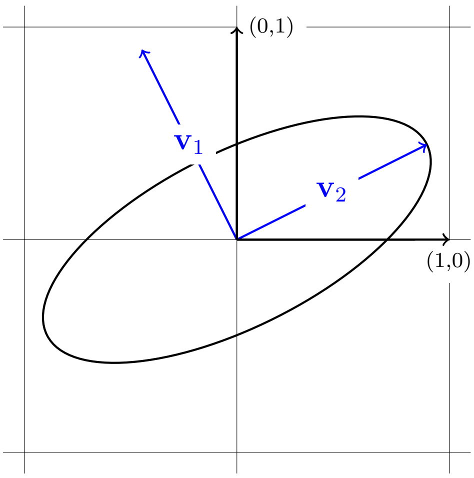
$$[g_2]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro vektor $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2)^T$ tak dostaneme rovnice $g_2(\mathbf{v}) = 6x_1^2 + x_2^2 = 1$. Tu upravíme na tvar

$$\left(\frac{x_1}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\right)^2 + x_2^2 = 1,$$

což je rovnice elipsy s poloosami délky $\frac{1}{\sqrt{6}}$ a 1 a středem v počátku.

Vzhledem ke kanonickým souřadnicím tak dostáváme elipsu se středem v počátku, s hlavní poloosou $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$ a s vedlejší poloosou $\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,2)^T$.



Úloha 13.4. Popište rovinný útvar s rovnicí

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 5 = 0$$

v prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem.

Návod:

1. Rozdělte rovnici na kvadratickou formu, lineární formu a absolutní člen.
2. Vyjádřete vše vůči vhodné bázi (získané v předchozích příkladech).
3. Upravte tvar na známou rovnici kuželosečky.
4. Popište tvar vzhledem ke kanonickým souřadnicím.

Řešení. Všimneme si, že výraz $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 5$ obsahuje kvadratickou formu

$$g_2(x_1, x_2)^T = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

a lineární formu $f(x_1, x_2)^T = 2x_1 + x_2$, tedy

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 5 = g_2(x_1, x_2)^T + f(x_1, x_2)^T - 5.$$

Matice kvadratické formy je

$$[g_2]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},$$

tedy z předchozích úloh víme, že pro ortonormální bázi $B = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)^T, \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T\right)$ máme

$$[g_2]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá spočítat vyjádření lineární formy f vzhledem k B (a kanonické bázi K_1 prostoru $\mathbb{R}^2$):

$$[f]^B = [f]^{K_2}[\mathrm{id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

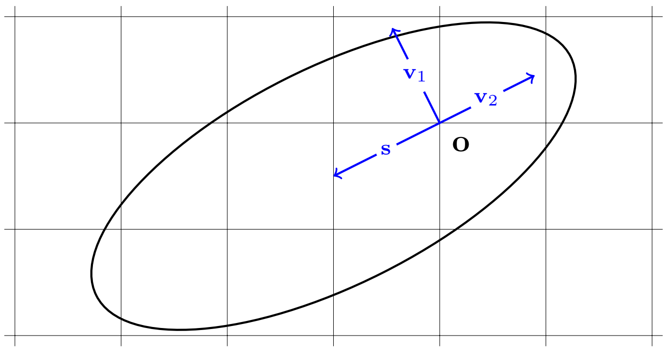
Vyjádříme-li tedy kvadriku v souřadnicích $(y_1, y_2)^T$ vzhledem k bázi B, dostaneme

$$6y_1^2 + y_2^2 + \sqrt{5}y_2 - 5 = 6y_1^2 + \left(y_2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} - 5 = 6y_1^2 + \left(y_2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0.$$

Hledaný geometrický útvar C se tedy dá vzhledem k bázi B vyjádřit jako

$$[C]_B = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{24}{25}y_1^2 + \frac{4}{25}\left(y_2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \right\}$$

Vidíme, že C je elipsa se středem $[\mathbf{s}]_B = (0, -\frac{\sqrt{5}}{2})^T$, a proto $\mathbf{s} = (-1, -\frac{1}{2})^T$, a s délkami poloos $\frac{5}{2\sqrt{6}}$ a $\frac{5}{2}$ ve směrech daných vektory báze B.



Úloha 13.5. Najděte všechna reálná řešení

(a) rovnice $2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2 = 0$,

(b) nerovnice $2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2 < 0$.

Řešení. Uvažme kvadratickou formu $g_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2$. Určíme její signaturu. Symetrickými transformacemi budeme upravovat matici $[g]_{k_3}$ vytvářející symetrické bilineární formy g:

$$[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že kvadratická form g_2 je pozitivní definitní a tedy $g_2(\mathbf{v}) > 0$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{v}$. Proto je (a) $g_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ právě když $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ a (b) rovnice $g_2(x_1, x_2, x_3) < 0$ nemá řešení.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 13.6. Nechť h je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s maticí

$$[h]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

vzhledem k nějaké bázi B. Rozhodněte, zda je h skalární součin na $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Ano, h je skalární součin.

Úloha 13.7. Najděte g-ortogonální bázi reálné symetrické bilineární formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$, která je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, jestliže

$$[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Například $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T\right)$. V tomto případě je

$$[h]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$