Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 5. května 2022

# 12 Bilineární formy

**Cíle cvičení:**

- Pro obecné bilineárních formy procvičit počítání matic a rozkladů na symetrickou a antisymetrickou část.
- Naučit se hledat ortogonální báze symetrických bilineárních a kvadratických forem.

**Řešené příklady:**

**Úloha 12.1.** Uvažujme zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^2 \times \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5$ dané předpisem (analytickým vyjádřením)

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 3x_2y_2$$

Ověřte, že je $f$ bilineární forma a najděte matice $f$ vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $B = \big((3,3)^T, (4,1)^T\big)$.

**Řešení.** Stačí, abychom si všimli, že

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

a proto se jedná o bilineární formu (vlastnosti násobení matic).

Označme $[f]_{K_2}$ matici $f$ vzhledem ke kanonické bázi. Postupujeme-li podle definice, tedy uvážíme, že tato matice obsahuje na $i$-tém řádku a $j$-tém sloupci právě hodnotu $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i^T[f]_{K_2}\mathbf{e}_j$, vidíme, že

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet $[f]_B$ postupujeme podle definice nebo využijeme tvrzení z přednášky:

$$[f]_B = ([\mathrm{Id}]^B_{K_2})^T[f]_{K_2}[\mathrm{Id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že výpočet $[f]_B$ z definice je v podstatě stejný. $\square$

**Úloha 12.2.** Buď $f$ bilineární forma

$$f\big((x_1,x_2,x_3)^T, (y_1,y_2,y_3)^T\big) = x_1y_2 + 3x_1y_3 + 6x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_3$$

na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^3$. Určete matice $f$, $f_s$ a $f_a$ vzhledem ke kanonické bázi a k bázi $B = \big((1,1,2)^T, (1,0,1)^T, (1,0,6)^T\big)$, kde $f_s$ je symetrická a $f_a$ antisymetrická bilineární forma, pro něž $f = f_s + f_a$.

**Řešení.** Nejprve seřadíme koeficienty polynomu určujícího analytické vyjádření bilineární formy do matice vzhledem ke kanonické bázi. Dostaneme

$$[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále určíme matici přechodu

$$[\mathrm{Id}]^B_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a poté spočítáme matici $f$ vzhledem k bázi $B$ ze vztahu

$$[f]_B = ([\mathrm{Id}]^B_{K_3})^T [f]_{K_3} [\mathrm{Id}]^B_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme matice symetrické a antisymetrické části (všimněme si, že $\frac{1}{2} = 4$ v $\mathbb{Z}_7$):

$$[f_s]_{K_3} = \frac{1}{2}([f]_{K_3} + [f]^T_{K_3}) = 4\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_{K_3} = [f]_{K_3} - [f_s]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[f_s]_B = \frac{1}{2}([f]_B + [f]^T_B) = 4\left(\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_B = [f]_B - [f_s]_B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

**Úloha 12.3.** Nechť $g_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2$ je kvadratická forma.

(a) Najděte matici symetrické bilineární formy $g$ na $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke kanonické bázi, která vytváří kvadratickou formu $g_2$,

(b) určete hodnost $g$ a rozhodněte, zda je $g$ regulární,

(c) najděte $g$-ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

**Řešení.** (a) Z předpisu určíme matici hledané symetrické bilineární formy $g$ vzhledem ke kanonické bázi

$$[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Stačí spočítat hodnost matice $\mathrm{rank}[g]_{K_3} = 3$, tedy matice i forma jsou regulární.

(c) Hledáme $g$-ortogonální bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Nejprve zvolíme vektor $\mathbf{u}_1$, pro který $g_2(\mathbf{u}_1) \neq 0$. Z matice $B$ vidíme, že sice $g_2(\mathbf{e}_1) = 0$, ale pro druhý vektor kanonické báze je $g_2(\mathbf{e}_1) = 3 \neq 0$. Položíme tedy například $\mathbf{u}_1 := \mathbf{e}_2$.

Je-li to možné, volíme nyní vektor $\mathbf{u}_2 \in \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1\}^{\perp_g}$, pro který $g_2(\mathbf{u}_2) \neq 0$. Potřebujme nejprve vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí

$$\mathbf{u}_1^T B = (0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

a poté mezi těmito řešeními najít takové, na němž je hodnota $g_2$ nenulová. Kdyby mezi řešeními soustavy $\mathbf{u}_1^T B\,\mathbf{u}_2 = 0$ neexistovalo řešení $\mathbf{u}_2$ s nenulovou hodnotou $g_2$, mohli bychom už zbylé vektory ortogonální báze volit mezi nalezenými řešeními libovolně. V našem případě vidíme, že například $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)^T$ řeší rovnici a $g_2(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^T B\,\mathbf{u}_2 = -2$.

Konečně tentokrát volíme vektor $\mathbf{u}_3 \in \mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}^{\perp_g}$, tedy řešíme soustavu rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Snadno určíme poslední bazický vektor $\mathbf{u}_3 = (3,4,6)$ a pro něj dopočítáme $g_2(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3^T B\,\mathbf{u}_3 = 60$. Našli jsme $g$-ortogonální bázi $B = ((0,2,0)^T, (0,1,1)^T, (3,4,6)^T)$ vůči níž má bilineární forma $g$ matici

$$[g]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

□

**Úloha 12.4.** Najděte nějakou $f$-ortogonální bázi $B$ kvadratické formy $f_2$ na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ s analytickým vyjádřením vzhledem ke kanonické bázi

$$f_2(x_1,x_2,x_3)^T = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2^2 + x_2x_3$$

a určete $[f]_B$.

**Řešení.** Nejprve určíme matici

$$[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

symetrické bilineární formy $f$, která vytváří kvadratickou formu $f_2$. Matici $[f]_{K_3}$ rozšíříme o jednotkovou matici. Dále postupujeme pomocí symetrických úprav levé poloviny matice, přičemž v pravé polovině zaznamenáváme provedené řádkové úpravy (tedy žádné sloupcové úpravy v pravé části rozšířené matice neprovádíme!):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

V pravé polovině matice dostáváme matici transponovanou k matici přechodu od $f$-ortogonální báze ke kanonické bázi. To znamená, že řádky pravé strany upravené matice tvoří $f$-ortogonální bázi $B = ((1,0,0)^T, (3,1,0)^T, (0,3,1)^T)$. Z levé strany matice potom vidíme, že

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

**Úloha 12.5.** Najděte nějakou $f$-ortogonální bázi symetrické bilineární formy $f$ a její matici vzhledem k $f$-ortogonální bázi, je-li

(a) $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Q}^2$ s maticí

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonické bázi,

(b) $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ s analytickým vyjádřením vzhledem ke kanonické bázi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2,$$

(c) $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ s maticí

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B = \big((1,2)^T, (2,3)^T\big)$,

(d) $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s analytickým vyjádřením vzhledem ke kanonické bázi

$$f\big((x_1,x_2,x_3)^T, (y_1,y_2,y_3)^T\big) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

(e) $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ s maticí

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B = \big((1,0,2)^T, (1,0,1)^T, (0,3,1)^T\big)$.

**Řešení.** (a) Upravujeme-li matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

symetrickými úpravami, zjevně nám při hledání ortogonální báze nepomůže přehození dvou řádků, jak jsme na to byli zvyklí u Gaussovy eliminace, protože následnou výměnou dvou sloupců, vynucenou symetrickými úpravami, dostáváme původní matici. Místo toho přičteme druhý řádek k prvnímu a poté druhý sloupec k prvnímu (uvědomme si, že tento postup v maticovém zápisu odpovídá úvaze tvrzení z přednášky o existenci ortogonální báze) a následně už můžeme postupovat standardně:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Tedy

$$[\mathrm{Id}]^P_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

je matice přechodu od $f$-ortogonální báze $P$ ke kanonické bázi, proto $P = \big((1,1)^T, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\big)$ a

$$[f]_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Nejprve snadno určíme matici

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonické bázi. Tentokrát nám k úpravě matice symetrická výměna řádku a sloupce pomůže, naopak obdobná úprava jako v příkladu (a),

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

je zbytečná a k nalezení diagonální matice nevede. Počítáme tedy

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Tedy v řádcích pravé poloviny poslední matice nacházíme bázi $P = \big((0,1)^T, (1,3)^T\big)$, pro níž $[f]_P = I_2$.

(c) Postupovali-li bychom stejně jako v úloze (a) a upravovali-li bychom symetrickými úpravami matici

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

našli bychom, poté, co bychom v levé části matice dostali diagonální matici, v pravé části právě matici transponovanou k matici přechodu od hledané ortogonální báze $P$ k bázi $B$. Uvážíme-li, že $([\mathrm{Id}]^P_{K_2})^T = ([\mathrm{Id}]^P_B)^T([\mathrm{Id}]^B_{K_2})^T$, stačí abychom místo jednotkové matice umístili napravo transponovanou matici přechodu od $B$ ke kanonické bázi a tu obvyklým způsobem upravovali:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Vidíme, že pravé části poslední matice máme transponovanou matici přechodu $([\mathrm{Id}]^P_{K_2})^T = ([\mathrm{Id}]^P_B)^T([\mathrm{Id}]^B_{K_2})^T$, proto $P = \big((2,3)^T, (2,1)^T\big)$. Konečně

$$[f]_P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Postupujeme stejně jako v případě (a) a (b), tedy určíme matici

$$[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bilineární formy $f$ vzhledem ke kanonické bázi a pak standardně symetricky upravujeme, tentokrát se symetrickým násobením řádků a sloupců vyhneme zlomkům:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dostáváme ortogonální bázi $P = \big((1,1,0)^T, (-1,1,0)^T, (2,0,2)^T\big)$ a matici bilineární formy

$$[f]_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k $P$.

(e) Tentokrát uvažujeme stejně jako v (c), proto upravujeme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

Našli jsme ortogonální bázi $P = \big((1,0,2)^T, (2,0,3)^T, (5,3,5)^T\big)$, vůči níž má bilineární forma $f$ matici $[f]_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

**Další základní příklady k počítání:**

**Úloha 12.6.** Najděte matici bilineární formy $g$ na $\mathbb{Q}^3$ vzhledem k bázi $D$, znáte-li její matici vzhledem k bázi $C$, jestliže $C = \big((1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\big)$, $D = \big((1,0,2)^T, (2,-1,0)^T, (1,0,1)^T\big)$ a

$$[g]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Platí, že

$$[g]_D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -9 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

**Úloha 12.7.** Nechť $f$, $g$ jsou formy a $B$ a $C$ báze z úloh 12.1 a 12.6 a uvažujme symetrické bilineární formy $f_s$ a $g_s$ a antisymetrické bilineární formy $f_a$ a $g_a$ splňující pro které $f = f_s + f_a$, $g = g_s + g_a$. Najděte matice $[f_s]_B$, $[f_a]_B$, $[g_s]_C$, $[g_a]_C$.

Řešení: Platí, že

$$[f_s]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad [f_a]_B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[g_s]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad [g_a]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Úloha 12.8.** Rozložte matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ na součin $LDL^T$, kde $L$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále a $D$ je diagonální.

Řešení: Platí, že

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$