Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání

Verze ze dne 3. května 2022

11 Singulární rozklad

Cíle cvičení:

- Procvičit počítání singulárních rozkladů (SVD) a dyadických rozkladů.
- Procvičit aplikace SVD na hledání spektrální normy a aproximace matice maticí nižší hodnosti.

Řešené příklady:

Úloha 11.1. Najděte singulární rozklady reálných matic

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zapište ve formě matice f_A vzhledem k ortonormálním bázím, jako maticový rozklad a jako dyadický rozklad.

Pozn.: V části (b) je snazší počítat přes singulární rozklad matice A^T.

Úloha 11.2. Pro matice A ze cvičení 11.1 určete:

(a) $\operatorname{Im} A$, $(\operatorname{Im} A)^\perp$, $\operatorname{Ker} A$, $(\operatorname{Ker} A)^\perp$,

(b) obraz jednotkové sféry $S = \{\mathbf{x} : ||\,\mathbf{x}\,|| = 1\}$,

(c) spektrální normu $||A||$ a množinu vektorů $\mathbf{x}$, pro které nastane rovnost $||A\,\mathbf{x}\,|| = ||A||\,||\,\mathbf{x}\,||$.

Úloha 11.3. Najděte singulární rozklady reálné matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, když víte, že matice

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 0, 1 a 9. Určete spektrální normu této matice a množinu vektorů $\mathbf{x}$, pro které nastane rovnost $||A\,\mathbf{x}\,|| = ||A||\,||\,\mathbf{x}\,||$.

Úloha 11.4. Matice $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ má singulární rozklad

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T$$

Najděte dyadický rozklad matice A a matici $\hat{A}$ hodnosti 2 tak, aby spektrální norma $||A - \hat{A}||$ byla co nejmenší. Určete obraz jednotkové sféry pro matice A a $\hat{A}$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 11.5. Najděte singulární rozklady reálných matic

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Úloha 11.6. Najděte singulární rozklad komplexní matice

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Úloha 11.7. Najděte singulární rozklad reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a najděte matici $\hat{A}$ hodnosti 1 tak, aby spektrální norma $||A - \hat{A}||$ byla co nejmenší.

Rozšiřující příklady:

Úloha 11.8. Uvažujme soustavu rovnic $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s maticí z úlohy 11.5.

(a) Jaké jsou spektrální normy $||A||$, $||A^{-1}||$?

Vektor $\mathbf{b}$ je vektor naměřených dat s maximální chybou měření $\delta\,\mathbf{b}$, $||\delta\,\mathbf{b}\,|| = 1$.

(b) Jaká je maximální absolutní chyba řešení uvažované soustavy?

(c) Jaká je maximální relativní chyba řešení uvažované soustavy? (Kolikrát je $\frac{||\delta x||}{||x||}$ větší než $\frac{||\delta b||}{||b||}$?)

Úloha 11.9. Pro reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ze cvičení 11.3

(a) najděte Moore-Penroseovu pseudoinverzní matici $A^\dagger$,

(b) najděte aproximaci řešení soustavy $A\mathbf{x} = (6, 2, 5)^T$ metodou nejmenších čtverců, která má navíc nejmenší možnou normu.