Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení

Verze ze dne 21. dubna 2022

10 Unitární diagonalizace

Cíle cvičení:

- Procvičit hledání ortonormálních bází složených z vlastních vektorů operátorů a matic.

Při řešení úloh přemýšlejte nad tím, jak vám v řešení může pomoci to, že o některých maticích víme, že jsou unitárně diagonalizovatelné, a tedy podprostory vlastních vektorů jsou navzájem kolmé.

V úlohách 10.1–10.3 je možné se vyhnout počítání charakteristických polynomů matic typu 3×3. *(Je nějaké vlastní číslo vidět? Je matice singulární?)*

Až si zopakujete Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci, vzpomeňte si, jak lze počítat ortogonální bázi jádra matice přímo, jen s pomocí řešení soustav rovnic.

Řešené příklady:

Úloha 10.1. Najděte reálnou ortogonální matici U, pro níž je $U^T AU$ diagonální, jestliže

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že obě matice jsou symetrické, tedy ortogonálně diagonalizovatelné.

(a) Obvyklým způsobem spočítáme charakteristický polynom, vlastní čísla a příslušné podprostory vlastních vektorů matice A. Dostaneme $p_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 8)$, vlastní čísla jsou -2 a 8 a příslušné podprostory vlastních vektorů $\mathbf{M}_{-2} = \mathrm{LO}\left\{(-3,1)^T\right\}$ a $\mathbf{M}_8 = \mathrm{LO}\left\{(1,3)^T\right\}$. Protože je matice A symetrická a tedy normální, jsou vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům na sebe kolmé. Proto normalizací vektorů $(-3,1)^T$ a $(1,3)^T$ dostaneme ortonormální bázi $B = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\right)$ složenou z vlastních vektorů matice A. Položíme-li

$$U = [\mathrm{Id}]^B_{K_3} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

je tato matice přechodu ortogonální a

$$U^T AU = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Určíme vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice A. Jedno vlastní číslo je zřejmě $\lambda = 3$. Vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí

$$A - 3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a dostaneme $\mathbf{M}_3 = \mathrm{LO}\left\{(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\right\}$. Protože další vlastní vektor musí být kolmý na vektory příslušné vlastnímu číslu 3, leží v podprostoru $\mathrm{Ker}\,(A - 3I)^\perp = \mathrm{LO}\{(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\}^\perp =$

$\mathrm{LO}\{(1,1,1)^T\}$. Zvolíme například vektor $(1,1,1)^T$ a spočítáme, že $A(1,1,1)^T = (9,9,9)^T$, odkud dostáváme druhé vlastní číslo 9.

Nyní najdeme ortonormální báze obou podprostorů vlastních vektorů. Pro vlastní číslo 9 stačí normalizovat, abychom dostali vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ a pro vlastní číslo 3 najdeme ortonormální bázi podprostoru $\mathbf{M}_3$. Můžeme postupovat tak, že zvolíme libovolný nenulový vektor prostoru $\mathbf{M}_3$, například vektor $(1,-1,0)^T$. Ten je nutně kolmý na vektor $(1,1,1)^T$. Po té spočítáme vektor kolmý na oba vektory $(1,-1,0)^T$ a $(1,1,1)^T$, jako řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledné vektory normalizujeme a položíme $B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T\right)$. Protože je B ortonormální báze, je matice přechodu $U = [\mathrm{Id}]^B_{K_3}$ ortogonální a

$$U^T A U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 10.2. Najděte pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ortonormální bázi B reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby byla matice $[f_A]^B_B$ diagonální.

Řešení. Nejprve buď standardním způsobem najdeme vlastní čísla matice $[f_A]^{K_3}_{K_3}$, jimiž jsou 1 a 7 nebo si (raději) všimneme, že 1 je vlastní číslo bez výpočtu charakteristického polynomu.

Pro vlastní číslo 1 najdeme podobně jako v předchozí úloze ortogonální bázi $\left((1,-1,0)^T, (1,1,-1)^T\right)$ podprostoru $\mathbf{M}_1$ příslušných vlastních vektorů. Můžeme postupovat tak, že nejprve najdeme jedno řešení $(1,-1,0)^T$ homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(zbylé dva řádky matice $A - I_3$ jsou násobkem prvního řádku) a pak řešíme soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbylý vlastní vektor je nutně kolmý na podprostor $\mathrm{LO}\left\{(1,-1,0)^T, (1,1,-1)^T\right\}$. Snadno nahlédneme, že jde o vektor $(1,1,2)^T$, který jsme měli v prvním řádku řešených homogenních soustav. Odpovídající vlastní číslo 7 zjistíme ze součinu $A(1,1,2)^T = (7,7,14)^T$ (stačilo vlastním vektorem vynásobit jen první řádek matice A).

Nyní nám stačí nalezenou ortogonální bázi normalizovat, abychom dostali hledanou ortonormální bázi $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T\right)$. Pro tuto bázi je matice

$$[f_A]^B_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

diagonální. □

Úloha 10.3. Pro matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}$$
najděte unitární matici U tak, aby matice byla U^*AU diagonální.

Řešení. Platí rovnost $A^* = A$, proto je matice A hermitovská. Odtud plyne, že je unitárně diagonalizovatelná a že jsou její vlastní čísla reálná. Chceme-li najít ortonormální bázi $\mathbb{C}^3$ složenou z vlastních vektorů, stačí nám najít ortonormální báze podprostorů řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $A - \lambda I_3$ pro jednotlivá vlastní čísla λ.

Nejprve si všimneme, že je matice A singulární, proto je 0 jejím vlastním číslem. Snadno tedy najdeme ortonormální bázi podprostoru příslušných vlastních vektorů $\mathrm{Ker}\,(A)$. Opět nejprve snadno najdeme jeden normalizovaný vlastní vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$ a poté vektor, který řeší homogenní soustavu s maticí
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Tím je (až na směr jednoznačně určený) normalizovaný vektor $\frac{1}{2}(-1, 1+i, 1)^T$.

Nyní zbývá obdobně jako v předchozích úlohách najít poslední vlastní vektor $\frac{1}{2}(1, 1+i, -1)^T$, o němž víme, že je kolmý na předchozí. To v našem případě znamená, že jde o vhodný násobek vektoru komplexně sdruženého s kterýmkoli řádkem matice A. Spočteme, že $A\frac{1}{2}(1, 1+i, -1)^T = 2(1, 1+i, -1)^T$ a tedy vlastní číslo příslušné tomuto vektoru je 4.

Zjistili jsme, že
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 0 & \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
$\square$

Úloha 10.4. Napište lineární operátor f na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem jako lineární kombinaci ortogonálních projekcí na přímku, jestliže

(a) $n = 2$ a $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y - x \\ 3x + 7y \end{pmatrix}$, (b) $n = 3$ a $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y + 2z \\ 2x + 5y + 2z \\ 2x + 2y + 5z \end{pmatrix}$.

(Upozornění: matice jsou nápadně podobné těm v úloze 10.1)

Řešení. Nejprve učiňme obecné pozorování pro lineární operátor f na reálného vektorového prostoru se standardním skalárním součinem: Je-li $B = (\mathbf{b}_i \mid i = 1, 2, \ldots, n)$ ortonormální báze složená z vlastních vektorů lineárního operátoru f, potom
$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \begin{pmatrix} \delta_{1i} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \delta_{2i} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \delta_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n [\lambda_i f_i]_B^B,$$
kde f_i jsou právě ortogonální projekce na přímky $\mathrm{LO}\{\mathbf{b}_i\}$. To znamená, že $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$. Potřebujeme tedy pouze najít vlastní čísla a ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů. Snadno nahlédneme, že v případě (a) je
$$[f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

V případě (b) máme

$$[f]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Údaje, které potřebujeme, jsme spočítali už v úloze 10.1:

(a) Ortonormální bázi B složenou z vlastních vektorů lineárního operátoru f tvoří posloupnost $B = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)^T, \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)^T\right)$ a skládá se z vlastních vektorů. Proto je lineární operátor f_1 ortogonální projekcí na přímku LO $\left\{(-3,1)^T\right\}$, lineární operátor f_2 ortogonální projekcí na přímku LO $\left\{(1,3)^T\right\}$ a platí, že $f = -2f_1 + 8f_2$. Známe matici přechodu

$$U = [\mathrm{Id}]_{K_3}^{B} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a matice ortogonálních projekcí vzhledem k B. Odtud spočítáme matice obou ortonormálních projekcí vzhledem ke kanonickým bázím:

$$[f_1]_{K_2}^{K_2} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

$$[f_2]_{K_2}^{K_2} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}.$$

Dostáváme také maticový rozklad

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}.$$

(b) Tentokrát máme spočítánu ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T\right)$. To znamená, že máme ortogonální projekce f_i na přímky LO $\{\mathbf{u}_i\}$. Navíc platí rovnost $f = 9f_1 + 3f_2 + 3f_3$ a opět tedy můžeme spočítatvmatice ortogonálních projekcí vzhledem ke kanonickým bázím jako $[f_i]_{K_2}^{K_2} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i^T$:

$$[f_1]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$[f_2]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[f_3]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

Další základní příklady k počítání:

Úloha 10.5. Zjistěte, zda jsou komplexní matice A, B normální.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1-2i & 3-i \end{pmatrix}, \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení: a) $A^*A \neq AA^*$, proto A není normální, b) matice B je hermitovská, proto je normální.

Úloha 10.6. Ukažte, že je reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ortogonálně diagonalizovatelná, najděte reálnou ortogonální matici U, pro níž je $U^T AU$ diagonální a součin $U^T AU$ určete.

Řešení: Například $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ a nutně $U^T AU = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Úloha 10.7. Uvažujme endomorfismus

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$$

na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte takovou ortonormální bázi B, pro kterou je matice $[f]_B^B$ diagonální, a tuto matici najděte.

Řešení: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T \right)$, $[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.