Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání
Verze ze dne 7. dubna 2022

9 Jordanův kanonický tvar (2. část)

Cíle cvičení:

- Hledání Jordanova tvaru a Jordanových řetízků,
- procvičení důsledků Cayleyho-Hamiltonovy věty.

Řešené příklady:

Úloha 9.1. Určete Jordanův kanonický tvar a bázi, vzhledem ke které má matice operátoru $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tento tvar, pro matice

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Úloha 9.2. Pokud existuje, určete Jordanův kanonický tvar matice A nad dvouprvkovým tělesem $\mathbb{Z}_2$ a bázi prostoru $\mathbb{Z}_2^5$, vzhledem ke které má operátor f_A tuto matici, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 9.3. Spočítejte pro každou následujících reálných matic charakteristický polynom $p_A(\lambda)$ a ověřte, že $p_A(A) = 0$:

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Existuje v jednotlivých případech reálný polynom p menšího stupně takový, že $p(A) = 0$? Jak problém souvisí s Jordanovým kanonickým tvarem daných matic?

Úloha 9.4. Ukažte, že matice z úlohy 9.3 jsou regulární a najděte v obou případech reálný polynom q takový, že $A^{-1} = q(A)$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 9.5. Najděte bázi, vzhledem ke které má operátor $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ matici v Jordanově kanonickém tvaru a určete tuto matici, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 9.6. Najděte bázi, vzhledem ke které má operátor $f_A\colon \mathbb{Z}_3^5 \to \mathbb{Z}_3^5$ matici v Jordanově kanonickém tvaru a určete tuto matici, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rozšiřující příklady:

Úloha 9.7. Řešte spojitý dynamický systém

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

(a) s počátečními hodnotami $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = -1$.

(b) s počátečními hodnotami $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = 0$.

Úloha 9.8. Řešte spojitý dynamický systém

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

s počátečními hodnotami $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = 2$.