Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 7. dubna 2022

9 Jordanův kanonický tvar (2. část)

Cíle cvičení:

- Hledání Jordanova tvaru a Jordanových řetízků,
- procvičení důsledků Cayleyho-Hamiltonovy věty.

Řešené příklady:

Úloha 9.1. Určete Jordanův kanonický tvar a bázi, vzhledem ke které má matice operátoru $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tento tvar, pro matice

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. (a) Spočteme, že charakteristický polynom matice A je $-(\lambda-2)^3$. To znamená, že matice A má jediné vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 3. Určíme podprostor $\mathbf{M}_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ příslušných vlastních vektorů:

$$\mathbf{M}_2 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{LO}\left\{(1,2,0)^T, (-1,0,2)^T\right\}.$$

Vidíme, že geometrická násobnost vlastního čísla 2 je 2, a proto má operátor f_A dva Jordanovy řetízky:

$$\mathbf{v}_1^1 \xmapsto{f_A - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}} \mathbf{o}$$
$$\mathbf{v}_2^2 \xmapsto{f_A - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}} \mathbf{v}_1^2 \xmapsto{f_A - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}} \mathbf{o}$$

Vektor $\mathbf{v}_1^2$ musí ležet v průniku jádra a obrazu operátoru $f_A - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Obraz tohoto operátoru odpovídá sloupcovému prostoru matice $A - 2I_3$. Proto

$$\operatorname{Im}(A - 2I_3) \cap \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{LO}\left\{(0,1,1)^T\right\} \cap \operatorname{LO}\left\{(1,2,0)^T, (-1,0,2)^T\right\} = \operatorname{LO}\left\{(0,1,1)^T\right\}.$$

Položíme $\mathbf{v}_1^2 = (0,1,1)^T$ a za vektor $\mathbf{v}_2^2$ zvolíme libovolné řešení rovnice $(A - 2I_2)\,\mathbf{x} = \mathbf{v}_1^2$ s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Tímto řešením je rovina $(\frac{1}{2},0,0)^T + \operatorname{LO}\{(1,2,0)^T, (-1,0,2)^T\}$ a můžeme volit například $\mathbf{v}_2^2 = (\frac{1}{2},0,0)^T$. Nakonec doplníme množinu $\{\mathbf{v}_1^2\}$ na bázi jádra operátoru $f_A - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ například volbou $\mathbf{v}_1^1 = (1,2,0)^T$. Když si ještě vektory v delším řetízku přenásobíme konstantou 2, aby vyšly celočíselné (musíme oba, jinak by přestaly tvořit řetízek), dostáváme bázi.

$$\left(\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2\right) = \left((1,2,0)^T, (0,2,2)^T, (1,0,0)^T\right),$$

vzhledem ke které má matice A Jordanův kanonický tvar

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. V okamžiku, kdy jsme spočítali jádro $\mathrm{Ker}\,(A - 2I_3)$ a hledali jsme vektor $\mathbf{v}_2^2$, jsme si také mohli uvědomit, že za $\mathbf{v}_2^2$ bychom mohli volit libovolný vektor z $\mathrm{Ker}\,(A-2I_3)^2 \setminus \mathrm{Ker}\,(A-2I_3)$, což by v našem případě byl libovolný vektor, který neleží v $\mathrm{Ker}\,(A-2I_3)$ (protože $(A-2I_3)^2 = 0$). Potom $\mathbf{v}_1^2 = (A-2I_3)\,\mathbf{v}_2^2$ a vektor $\mathbf{v}_1^1$ bychom dostali doplněním na bázi podprostoru $\mathrm{Ker}\,(A-2I_3)$.

(b) Spočteme charakteristický polynom $p_A(\lambda) = -(\lambda+1)^3$ a dostaneme tak jediné vlastní číslo -1 algebraické násobnosti 3. Spočteme, že $\mathbf{M}_{-1} = \mathrm{Ker}\,(A+I_3) = \left\{(1,0,-1)^T\right\}$. Odtud vidíme, že matice A má jediný Jordanův řetízek

$$\mathbf{v}_3 \overset{f_A+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}}{\longmapsto} \mathbf{v}_2 \overset{f_A+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}}{\longmapsto} \mathbf{v}_1 \overset{f_A+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}}{\longmapsto} \mathbf{o}$$

a její Jordanův kanonický tvar je

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Najdeme nejprve vektor $\mathbf{v}_3$ jako řešení rovnice $(f_A + \mathrm{id}_3)^2\,\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$. Ta vede na soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Řešením je rovina $(1,0,0)^T + \mathrm{LO}\left\{(0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right\}$ a za $\mathbf{v}_3$ můžeme zvolit libovolný její prvek. Volme například $\mathbf{v}_3 = (1,0,0)^T$. Potom je $\mathbf{v}_2 = (A+I_3)\,\mathbf{v}_3$, což v našem případě dává $\mathbf{v}_2 = (2,1,-3)^T$. $\square$

Úloha 9.2. Pokud existuje, určete Jordanův kanonický tvar matice A nad dvouprvkovým tělesem $\mathbb{Z}_2$ a bázi prostoru $\mathbb{Z}_2^5$, vzhledem ke které má operátor f_A tuto matici, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Matice A je regulární a proto může mít jediné vlastní číslo 1. Z následujícíhu výpočtu

$$A + I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vidíme, že hodnost matice $A + I_5$ je 3 a tedy 1 je vlastní číslo geometrické násobnosti 2. Budeme počítat mocniny matice $A + I_5$ a jejich hodnosti. Zjistíme, že

$$(A + I_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice hodnosti 1 a $(A+I_5)^3 = 0$. Odtud odvodíme, že matice A má dva Jordanovy řetízky

$$\mathbf{v}_2^1 \overset{f_A+\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2^5}}{\longmapsto} \mathbf{v}_1^1 \overset{f_A+\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2^5}}{\longmapsto} \mathbf{o},$$

$$\mathbf{v}_3^2 \overset{f_A+\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2^5}}{\longmapsto} \mathbf{v}_2^2 \overset{f_A+\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2^5}}{\longmapsto} \mathbf{v}_1^2 \overset{f_A+\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2^5}}{\longmapsto} \mathbf{o},$$

jeden délky 2 a druhý délky 3, a že její Jordanův tvar je

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(A - I_5) &= \mathrm{LO}\left\{(1,0,0,1,0)^T, (0,0,1,0,0)^T\right\}, \\ \mathrm{Ker}\,(A - I_5)^2 &= \mathrm{Ker}\,(A - I_3) + \mathrm{LO}\left\{(0,1,0,0,1)^T, (0,0,0,1,0)^T\right\}, \\ \mathrm{Ker}\,(A - I_5)^3 &= \mathbb{Z}_2^5. \end{aligned}$$

Nejprve sestrojíme delší z Jordanových řetízků. Zvolíme $\mathbf{v}_3^2 \in \mathbb{Z}_2^5 \setminus \mathrm{Ker}\,(A - I_5)^2$, například $(0,0,0,0,1)^T$ a spočteme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2^2 &= (A - I_5)\,\mathbf{v}_3^2 = (0,1,1,1,1)^T \\ \mathbf{v}_1^2 &= (A - I_5)\,\mathbf{v}_2^2 = (1,0,0,1,0)^T. \end{aligned}$$

Dále zvolíme $\mathbf{v}_2^1 \in \mathrm{Ker}\,(A - I_5)^2 \setminus (\mathrm{Ker}\,(A - I_5) + \mathrm{LO}\,\{\mathbf{v}_2^2\})$, například $\mathbf{v}_2^1 = (0,0,0,1,0)^T$. Nakonec dostaneme, že $\mathbf{v}_1^1 = (A - I_5)\,\mathbf{v}_2^1 = (0,0,1,0,0)^T$. Báze, vzhledem ke které má matice A výše uvedený Jordanův tvar J_A je (například) $B = (\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_3^2)$. $\square$

Úloha 9.3. Spočítejte pro každou následujících reálných matic charakteristický polynom $p_A(\lambda)$ a ověřte, že $p_A(A) = 0$:

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Existuje v jednotlivých případech reálný polynom p menšího stupně takový, že $p(A) = 0$? Jak problém souvisí s Jordanovým kanonickým tvarem daných matic?

Řešení. (a) Vypočteme, že $p_A(\lambda) = 1 + 2\lambda + \lambda^2 = (1 + \lambda)^2$ a ověříme přímým výpočtem, že

$$I_2 + 2A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stejně dobře jsme mohli ale ověřit i rovnost

$$(I_2 + A)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Žádný nenulový polynom p stupně menšího než 2 takový, že $p(A) = 0$, neexistuje. V tom případě by totiž musel být p tvaru $p(\lambda) = c\lambda + d$ a matice A by musela být tvaru

$$\begin{pmatrix} -\frac{d}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{d}{c} \end{pmatrix}.$$

S Jordanovým tvarem to souvisí tak, že pro libovolnou reálnou (nebo komplexní) regulární matici R a polynom p platí $p(RAR^{-1}) = R\,p(A)R^{-1})$. Speciálně můžeme spočítat Jordanův kanonický tvar $J = RAR^{-1}$ matice A, přičemž standardním postupem dostaneme například (matice R není dána jednoznačně):

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Když už se dopočítáme až sem, je skoro triviální ověřit, že $p_A(J_A) = (I_2 + J_A)^2 = 0$.

(b) Spočítáme, že $p_A(\lambda) = 18 - 21\lambda + 8\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 2)$ a např., že

$$p_A(A) = -(A - I_3)^2(A - I_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abychom zodpověděli otázku ohledně polynomu p stupně menšího než 3, převedeme matici A do Jordanova kanonického tvaru $J_A = RAR^{-1}$. Standardním výpočtem zjistíme, že vlastní číslo 3 má geometrickou násobnost 2 a vlastní číslo 2 má geometrickou násobnost 1. Matice A je tedy diagonalizovatelná a

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odtud okamžitě vidíme, že $p(J_A) = 0$ pro $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$. Pak nutně i $p(A) = 0$, což ostatně lze jednoduše ověřit i přímo stejným způsobem jako výše. □

Úloha 9.4. Ukažte, že matice z úlohy 9.3 jsou regulární a najděte v obou případech reálný polynom q takový, že $A^{-1} = q(A)$.

Řešení. (a) Regularitu vidíme z toho, že nula není vlastní číslo. Jelikož $I_2 = -2A - A^2 = A(-2I_2 - A)$, nutně $A^{-1} = -2I_2 - A$. Tj. můžeme vzít $q(\lambda) = -2 - \lambda$. Můžeme ověřit i přímo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2I_2 - A.$$

(b) Nula opět není vlastním číslem A a víme, že $6I_3 = 5A - A^2$. Tedy $I_3 = \frac{1}{6}A(5 - A)$ a můžeme vzít $q(\lambda) = \frac{1}{6}(5 - \lambda)$. Pokud chceme, snadno ověříme, že

$$q(A) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

je inverzní matice k A.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 9.5. Najděte bázi, vzhledem ke které má operátor $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ matici v Jordanově kanonickém tvaru a určete tuto matici, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení: Například $\big((-1,1,2)^T, (1,0,-1)^T, (-1,1,1)^T\big)$;

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 9.6. Najděte bázi, vzhledem ke které má operátor $f_A\colon \mathbb{Z}_3^5 \to \mathbb{Z}_3^5$ matici v Jordanově kanonickém tvaru a určete tuto matici, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Například $\big((1,0,2,0,1)^T,(2,1,1,0,2)^T,(0,1,1,0,0)^T,(1,0,1,1,1)^T,(0,1,0,1,1)^T\big)$;

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozšiřující příklady:

Úloha 9.7. Řešte spojitý dynamický systém

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

(a) s počátečními hodnotami $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = -1$.

(b) s počátečními hodnotami $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = 0$.

Řešení. Položme

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme, že vzhledem k bázi $B = \big((1,-1)^T,(2,-1)^T\big)$ má matice A Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme matice přechodu

$$P = [\mathrm{id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad [\mathrm{id}]^{K_2}_B = P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme $\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t) = PJP^{-1}\,\mathbf{x}(t)$, odkud $P^{-1}\,\mathbf{x}'(t) = JP^{-1}\,\mathbf{x}(t)$. Položme $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\,\mathbf{x}(t)$ a řešme rovnici $\mathbf{y}'(t) = J\,\mathbf{y}(t)$, tj.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tak rovnice

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= 2y_2(t) \end{aligned}$$

Řešením druhé z rovnic je funkce $y_2(t) = y_2(0)e^{2t}$.

(a) Spočteme, že

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostaneme, že $y_2(t) = 0$. Dosazením do první rovnice dostaneme, že $y_1'(t) = 2y_1(t)$ a tedy $y_1(t) = y_1(0)e^{2t} = e^{2t}$. Nakonec spočítáme, že

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

(b) Spočteme, že

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostaneme, že $y_2(t) = e^{2t}$. Dosazením do první rovnice dostaneme

$$y_1'(t) = 2y_1(t) + e^{2t}.$$

Uvažme funkci $u(t)$ takovou, že $y_1(t) = u(t)e^{2t}$. Dostaneme, že

$$u'(t)e^{2t} + 2u(t)e^{2t} = 2u(t)e^{2t} + e^{2t},$$

odkud plyne, že $u'(t) = 1$ a tedy $u(t) = t + c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Proto je $y_1(t) = (t + c)e^{2t}$. Dosazením $t = 0$ získáme, že $-1 = y_1(0) = c$ a tedy $y_1(t) = (t - 1)e^{2t}$. Nakonec spočítáme, že

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t-1)e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Úloha 9.8. Řešte spojitý dynamický systém

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

s počátečními hodnotami $x_1(0) = 1$ a $x_2(0) = 2$.

Řešení: $x_1(t) = (t + 1)e^t$, $x_2(t) = (t + 2)e^t$.