Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání
Verze ze dne 31. března 2022

8 Jordanův kanonický tvar (1. část)

Cíle cvičení:

- Naučit se počítat Jordanův kanonický tvar a Jordanovy řetízky,
- procvičit řešení obecných lineárních dynamických systémů.

Řešené příklady:

Úloha 8.1. Uvažujme matice

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a příslušné lineární operátory $f_X, f_Y : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Najděte báze B a C, aby byly matice $[f_X]_B^B$ a $[f_Y]_C^C$ v Jordanově kanonickém tvaru a regulární matici P, aby $P^{-1}XP = Y$.

Úloha 8.2. Uvažujme lineární operátor $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ určený maticí

$$[f]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Najděte bázi B, vzhledem ke které mít operátor f Jordanovu matici,

(b) spočítejte $[f^{45}]_B^B$,

(c) položíme-li $A = \frac{1}{3}[f]_{K_3}^{K_3}$, spočítejte mocninu A^{45}.

Úloha 8.3. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ složenou z Jordanových řetízků operátoru f_A a matici f_A vzhledem k této bázi.

Úloha 8.4. Vyřešte diferenční rovnici $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1})$ pro počáteční vektor $\mathbf{x}_0 = (2,1)^T$, kde je operátor $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dán vztahem

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 5y \end{pmatrix}$$

Úloha 8.5. Najděte vzorec pro n-tý člen reálné posloupnosti a_n, jestliže

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n.$$

Další základní příklady k počítání:

Úloha 8.6. O reálné matici A řádu 13 víme, že má charakteristický polynom $p_A(x) = (2-x)^9(3-x)^4$, $\dim(\operatorname{Ker}(A-3I_{13})) = 1$, $\dim(\operatorname{Ker}(A-2I_{13})) = 4$, $\dim(\operatorname{Ker}((A-2I_{13})^2)) = 7$, $\dim(\operatorname{Ker}((A-2I_{13})^3)) = 9$. Určete matici J v Jordanově kanonickém tvaru podobnou matici A.

Úloha 8.7. Ukažte, že existuje a najděte nejmenší přirozené n, pro které $A^n = 0$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}^n.$$

Úloha 8.8. Vypočítejte A^{10} pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Úloha 8.9. Matice operátoru f na $\mathbb{R}^2$ vzhledem k bázi B je A. Najděte bázi C, aby $[f]_C^C$ byla v Jordanově kanonickém tvaru, je-li

$$B = \big((1,1)^T, (1,-2)^T\big) \quad \text{a} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 8.10. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

najděte bázi B prostoru $\mathbb{R}^3$ složenou z Jordanových řetízků operátoru f_A a matici f_A vzhledem k této bázi.

Úloha 8.11. Najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ složenou z Jordanových řetízků operátoru f_A a matici f_A vzhledem k této bázi pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 8.12. Najděte bázi B prostoru $\mathbb{Z}_7^4$, pro kterou je $[f_A]_B^B$ v Jordanově kanonickém tvaru a určete $[f_A]_B^B$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$