Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 31. března 2022

8 Jordanův kanonický tvar (1. část)

Cíle cvičení:

- Naučit se počítat Jordanův kanonický tvar a Jordanovy řetízky,
- procvičit řešení obecných lineárních dynamických systémů.

Řešené příklady:

Úloha 8.1. Uvažujme matice

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a příslušné lineární operátory $f_X, f_Y : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Najděte báze B a C, aby byly matice $[f_X]_B^B$ a $[f_Y]_C^C$ v Jordanově kanonickém tvaru a regulární matici P, aby $P^{-1}XP = Y$.

Řešení. Nejprve zjistíme, že charakteristický polynom obou matic X i Y je $(\lambda - 2)^2$. Proto mají obě matice jediné vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 2. Nyní spočítáme vlastní vektory, tedy vyřešíme homogenní soustavy rovnic s maticemi

$$X - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad a \quad Y - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme množina vlastních vektorů matice X je $\mathrm{LO}\{(1,-1)^T\}$ a množina vlastních vektorů matice Y je $\mathrm{LO}\{(1,1)^T\}$, tedy vlastní číslo obou matic má geometrickou násobnost 1.

Jordanův kanonický tvar matice obou operátorů má na diagonále právě vlastní číslo 2 a nad diagonálou nulu nebo jedničku. Protože operátory zřejmě nejsou diagonalizovatelné, mají oba Jordanův kanonický tvar $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Nyní hledáme pro obě matice Jordanovy řetízky. Nejprve uvažujme operátor f_X, pro který hledáme bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ splňující

$$[f_X]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{v}_1$ musí být vlastním vektorem matice X. Zvolme vektor $(3,-3)^T$ a druhý vektor $\mathbf{v}_2$ dostaneme jako řešení nehomogenní soustavy rovnic $(X - 2I_2)\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{array}\right).$$

Vidíme, že soustavu řeší například vektor $(1,0)^T$. Našli jsme tak bázi $B = ((3,-3)^T, (1,0)^T)$.

Podobně postupujeme v případě matice Y. Nejprve najdeme její vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = (1,1)^T$ a poté hledáme druhý vektor $\mathbf{v}_2$ Jordanova řetízku. Ten musí splňovat rovnost $f_Y(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2$. Řešením nehomogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

dostaneme (například), že $\mathbf{v}_2 = (0,1)^T$, a tedy $C = ((1,1)^T, (0,1)^T)$.

Pro nalezení matice P stačí uvážit, že

$$[\mathrm{id}]^{K_2}_B X [\mathrm{id}]^B_{K_2} = [f_X]^B_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = [f_Y]^C_C = [\mathrm{id}]^{K_2}_C Y [\mathrm{id}]^C_{K_2}.$$

Odtud odvodíme, že $([\mathrm{id}]^{K_2}_C)^{-1}[\mathrm{id}]^{K_2}_B X [\mathrm{id}]^B_{K_2}([\mathrm{id}]^C_{K_2})^{-1} = Y$ a tedy

$$P = [\mathrm{id}]^B_{K_2}([\mathrm{id}]^C_{K_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Poznámka. Všimněme si v řešení předchozí úlohy nezvyklého součinu

$$P = [\mathrm{id}]^B_{K_2}([\mathrm{id}]^C_{K_2})^{-1} = [\mathrm{id}]^B_{K_2}[\mathrm{id}]^{K_2}_C.$$

Toto není matice přechodu mezi bázemi C a B, výsledek ale dává smysl. V řešení využíváme toho, že zobrazení mají stejný Jordanův tvar vůči různým bázím. Vztah $[\mathrm{id}]^C_{K_2}[\mathrm{id}]^{K_2}_B X [\mathrm{id}]^B_{K_2}[\mathrm{id}]^{K_2}_C = Y$ lze proto interpretovat takto: abychom spočítali $Y\mathbf{x}$ pomocí matice X, musíme vektor $\mathbf{x}$ převést do souřadnic vůči bázi C, interpretovat tyto souřadnice, jako by byly vůči bázi B, převést je zpět do souřadnic vůči kanonické bázi, aplikovat X, a inverzním způsobem pak převedeme výsledný vektor zpět.

Úloha 8.2. Uvažujme lineární operátor $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ určený maticí

$$[f]^{K_3}_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Najděte bázi B, vzhledem ke které mít operátor f Jordanovu matici,

(b) spočítejte $[f^{45}]^B_B$,

(c) položíme-li $A = \frac{1}{3}[f]^{K_3}_{K_3}$, spočítejte mocninu A^{45}.

Řešení. (a) Spočteme charakteristický polynom $p_f(\lambda) = (3-\lambda)^3$. Vidíme, že operátor f má jediné vlastní číslo 3 algebraické násobnosti 3. Určíme množinu příslušných vlastních vektorů (v souřadnicích vzhledem ke kanonické bázi):

$$\mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,([f]^{K_3}_{K_3} - 3I_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Zvolíme si například vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = (-2,0,2)^T$ a dále počítáme Jordanův řetízek. Řešením homogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

dostaneme přímku $(0,1,0)^T + \mathrm{LO}\left\{(-1,0,1)^T\right\}$ těch vektorů $\mathbf{x}$, pro které $(f - 3\mathrm{id})(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_1$. Za vektor $\mathbf{v}_2$ můžeme volit libovolný její bod, například $\mathbf{v}_2 = (-1,1,1)^T$. Nakonec řešíme soustavu s pravou stranou odpovídající vektoru $\mathbf{v}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Řešením této soustavy je přímka $(1,0,0)^T + \mathrm{LO}\left\{(-1,0,1)^T\right\}$. Zvolíme [1] $\mathbf{v}_3 = (1,0,0)^T$. Našli jsme bázi $B = \left((-2,0,2)^T, (-1,1,1)^T, (1,0,0)^T\right)$, pro níž $[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Jordanova věta nám může pomoct při počítání mocnin matic. Nejdříve připomeňme, že mocninu libovolné Jordanovy buňky dostaneme jako

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda_i^{k-n+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{n-2}\lambda_i^{k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i^k \end{pmatrix},$$

kde položíme $\binom{k}{r}\lambda_i^{k-r} = 0$ pro $r > k$. To použijeme na matici

$$[f^{45}]_B^B = ([f]_B^B)^{45} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{45} = \begin{pmatrix} 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} & 990 \cdot 3^{43} \\ 0 & 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} \\ 0 & 0 & 3^{45} \end{pmatrix}.$$

(c) V (a) jsme fakticky spočítali regulární matici $P = [\mathrm{id}]_{K_3}^B$, tak, že platí $3A = PJP^{-1}$, kde J je Jordanův kanonický tvar matice $[f]_{K_3}^{K_3}$. Proto

$$A^k = P\frac{1}{3}JP^{-1}P\frac{1}{3}JP^{-1}\dots P\frac{1}{3}JP^{-1} = P\frac{1}{3^k}J^kP^{-1}.$$

Popsaným postupem tedy najdeme mocninu A^{45}:

$$A^{45} = \frac{1}{3^{45}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} & 990 \cdot 3^{43} \\ 0 & 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} \\ 0 & 0 & 3^{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 & 110 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -234 & -30 & -235 \\ 15 & 1 & 15 \\ 235 & 30 & 236 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 8.3. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ složenou z Jordanových řetízků operátoru f_A a matici f_A vzhledem k této bázi.

Řešení. Snadno spočteme charakteristický polynom $p_A(\lambda) = -(1+\lambda)^3$. Určíme množinu vlastních vektorů matice A příslušných jedinému vlastnímu číslu -1.

$$\mathrm{Ker}\,(A + I_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{(-1,0,1)^T, (0,1,0)^T\right\}$$

Geometrická násobnost vlastního čísla -1 je 2, takže hledaná báze je spojením řetízku $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ délky 2 a řetízku $(\mathbf{v}_3)$ délky 1. Vektor $\mathbf{v}_1$ musíme zvolit jako nenulový vlastní vektor, který zároveň leží v

[1] Všimněte, si rovnice $(f - 3\mathrm{id})(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_3$ nemá řešení.

$\mathrm{Im}\,(A+I_3)$. Snadno spočítáme, že například $\mathbf{v}_1 = (1,-1,-1)^T \in \mathrm{Ker}\,(A+I_3) \cap \mathrm{Im}\,(A+I_3)$. Vektor $\mathbf{v}_2$ dopočteme řešením nehomogenní soustavy $(A+I_3)\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Řešením je např. $\mathbf{v}_2 = (1,0,0)^T$. Vektor $\mathbf{v}_3$ získáme doplněním vektoru $\mathbf{v}_1$ na bázi $\mathrm{Ker}\,(A+I_3)$. Zvolíme třeba $\mathbf{v}_3 = (0,1,0)^T$. Pro bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ tvořenou vektory $\mathbf{v}_1 = (1,-1,-1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,0)^T$ a $\mathbf{v}_3 = (0,1,0)^T$ je

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 8.4. Vyřešte diferenční rovnici $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1})$ pro počáteční vektor $\mathbf{x}_0 = (2,1)^T$, kde je operátor $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dán vztahem

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -2x+5y \end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve určíme matici lineárního operátoru f vzhledem ke kanonické bázi

$$A = [f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a uvědomíme si, že $\mathbf{x}_k = A^k\,\mathbf{x}_0$. Dále standardním postupem spočítáme Jordanův charakteristický tvar této matice a Jordanův řetízek. Spočítáme charakteristický polynom $p_A(\lambda) = (\lambda-3)^2$, odtud jediné vlastní číslo 3 a podprostor vlastních vektorů $\mathrm{Ker}\,(A-3I_2) = \mathrm{LO}\left\{(1,1)^T\right\}$. Zvolíme vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = (2,2)^T$ a řešíme soustavu $(A-3I_3)\,\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$ s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Zvolíme libovolné její řešení, například $\mathbf{v}_2 = (0,1)^T$. Vezmeme matici

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

přechodu od báze tvořené nalezeným řetízkem ke kanonické bázi a spočítáme, že

$$A^k = P\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^k P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^k & k3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá dopočítat

$$\mathbf{x}_k = A^k\,\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^k & k3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^{k-1}\begin{pmatrix} 6-2k \\ 3-2k \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 8.5. Najděte vzorec pro n-tý člen reálné posloupnosti a_n, jestliže

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n.$$

Řešení. Uvědomíme-li si, že

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix},$$

můžeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladu.

Nejprve spočítáme charakteristický polynom $p_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$ matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a poté obvyklým způsobem spočítáme vlastní vektory, Jordanův kanonický tvar a Jordanův řetízek pro vlastní číslo 2. Dostaneme, že matice A má Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seřazením dvou vektorů Jordanova řetízku pro vlastní číslo 2 a vlastního vektoru příslušného vlastnímu číslu 1 do sloupců dostaneme matici

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pro níž platí $A = PJP^{-1}$, a odtud $A^k = PJ^kP^{-1}$. To znamená, že

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (n+1)2^n & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2^{n+3}(2n+1) + 6. \end{aligned}$$

□

Další základní příklady k počítání:

Úloha 8.6. O reálné matici A řádu 13 víme, že má charakteristický polynom $p_A(x) = (2-x)^9(3-x)^4$, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A-3I_{13})) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A-2I_{13})) = 4$, $\dim(\mathrm{Ker}\,((A-2I_{13})^2)) = 7$, $\dim(\mathrm{Ker}\,((A-2I_{13})^3)) = 9$. Určete matici J v Jordanově kanonickém tvaru podobnou matici A.

Řešení: Hledaný Jordanův tvar[2] je

$$\begin{pmatrix}
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}.$$

Úloha 8.7. Ukažte, že existuje a najděte nejmenší přirozené n, pro které $A^n = 0$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}^n.$$

Řešení: Matice A je nilpotentní, neboť má charakteristický polynom $-\lambda^3$. Nejmenší n pro které $A^n = 0$ je 3.

Úloha 8.8. Vypočítejte A^{10} pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Hledaná mocnina je

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 10 \cdot 2^9 & 45 \cdot 2^8 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 10 \cdot 2^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{10} & 10 \cdot 3^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix}.$$

Úloha 8.9. Matice operátoru f na $\mathbb{R}^2$ vzhledem k bázi B je A. Najděte bázi C, aby $[f]_C^C$ byla v Jordanově kanonickém tvaru, je-li

$$B = \left((1,1)^T, (1,-2)^T\right) \quad \text{a} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Např. $C = \left((3,-3)^T, (-1,2)^T\right)$ (báze není určena jednoznačně).

Úloha 8.10. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

najděte bázi B prostoru $\mathbb{R}^3$ složenou z Jordanových řetízků operátoru f_A a matici f_A vzhledem k této bázi.

[2] Jordanův tvar je určen jednoznačně až na pořadí Jordanových buněk.

Řešení: $B = \left((1,0,-1)^T, \frac{1}{3}(1,1,0)^T, \frac{1}{9}(2,-1,0)^T\right)$ a

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 8.11. Najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ složenou z Jordanových řetízků operátoru f_A a matici f_A vzhledem k této bázi pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: $B = \left((-1,1,1)^T, (-1,-2,0)^T, (-1,0,1)^T\right)$ a

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Úloha 8.12. Najděte bázi B prostoru $\mathbb{Z}_7^4$, pro kterou je $[f_A]_B^B$ v Jordanově kanonickém tvaru a určete $[f_A]_B^B$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $B = \left((1,6,1,0)^T, (0,1,2,0)^T, (0,0,1,6)^T, (6,6,3,0)^T\right)$ a

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$