Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání
Verze ze dne 24. března 2022

7 Diagonalizovatelnost (2. část)

Cíle cvičení:

- Procvičit rychlé rozhodování, zda je matice diagonalizovatelná,
- počítat mocniny diagonalizovatelných matic,
- naučit se řešit lineární dynamické systémy.

Řešené příklady:

Úloha 7.1. Nechť ψ je lineární operátor na vektorové prostoru $\mathbb{R}^3$ daný předpisem

$$\psi((x, y, z)^T) = (x + 2y + z, 2x - y + 2z, -2y)^T.$$

(a) Ověřte, že je lineární operátor ψ diagonalizovatelný,

(b) najděte bázi B, vůči níž má lineární operátor ψ diagonální matici,

(c) najděte pro každé $n \in \mathbb{N}$ matici lineárního operátoru ψ^n a matici ψ^{154} vzhledem ke kanonické bázi,

Úloha 7.2. Ověřte, že je reálná matice A regulární a diagonalizovatelná nad $\mathbb{C}$ a spočítejte pro každé celé z matici A^z, jestliže

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 7.3. Vyřešte diskrétní lineární dynamický systém

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n$$

nad $\mathbb{R}^2$ s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0 = (3, -3)^T$.

Úloha 7.4. Najděte vzorec pro n-tý člen reálné posloupnosti a_n, jestliže

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.$$

Další základní příklady k počítání:

Úloha 7.5. Ověřte, že je reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

regulární diagonalizovatelná a spočítejte A^z pro všechna $z \in \mathbb{Z}$.

Úloha 7.6. Najděte explicitní vzorec pro a_n v následující posloupnosti reálných čísel.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2} \ \text{ pro } n \geq 2.$$

Úloha 7.7. Vyřešte diferenční rovnici (diskrétní lineární dynamický systém) $\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k$ s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Obtížnější úloha:

Úloha 7.8. Vyřešte pro počáteční podmínky $u_1(0) = 2$ a $u_2(0) = 3$ soustavu diferenciálních rovnic, kde neznámé jsou reálné funkce reálné proměnné splňující:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + u_2 \\ u_2' &= -2u_1 + 4u_2 \end{aligned}$$