Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání
Verze ze dne 10. března 2022

5 Vlastní čísla a vlastní vektory

Cíle cvičení:

- Počítat vlastní čísla matic i lineárních operátorů a jejich algebraickou násobnost,
- umět najít všechny vlastní vektory.

Řešené příklady:

Úloha 5.1. Symbolem K_2 označme kanonickou bázi na prostoru $\mathbb{R}^2$. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí

$$\text{(a)}\quad [f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad [f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

V obou případech ověřte, že je operátor f izomorfismus. Dále najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory operátorů f a f^{-1}.

Úloha 5.2. Nechť f je lineární operátor na podprostoru $\mathbf{V} = \mathrm{LO}\{(1,0,1)^T, (2,-1,0)^T\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$, pro který platí

$$f((1,0,1)^T) = (9,-4,1)^T \text{ a } f((2,-1,0)^T) = (-3,2,1)^T.$$

Spočítejte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory operátoru f.

Úloha 5.3. Označme p ortogonální projekci reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem na rovinu $\mathbf{U} = \mathrm{LO}\{(1,2,3)^T, (1,0,1)^T\}$. Na p budeme pohlížet jako na lineární operátor na prostoru $\mathbb{R}^3$.

(a) Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory p,

(b) Určete všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $[p]_{K_3}^{K_3}$.

Úloha 5.4. Najděte nad tělesem komplexních čísel charakteristické polynomy, všechna vlastní čísla včetně algebraické násobnosti a všechny vlastní vektory matic

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ \text{(b)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ \text{(c)}\quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5.5. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ najděte všechna vlastní čísla, jejich algebraické násobnosti a všechny vlastní vektory.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 5.6. Určete všechna vlastní čísla a vektory lineárního operátoru D na prostoru všech reálných polynomů v proměnné x, který polynomu p přiřazuje jeho první derivaci p'.

Úloha 5.7. Určete vlastní čísla (i s algebraickými násobnostmi) a vlastní vektory lineárního operátoru f na reálném vektorovém $\mathbb{R}^3$, jestliže

(a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, (b) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, (c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Úloha 5.8. Určete koeficienty u λ^4, λ^3 a konstantní koeficient charakteristického polynomu reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Úloha 5.9. Matice lineárního operátoru na $\mathbb{Z}_3^3$ vhledem k bázi B je A. Určete vlastní čísla (i s algebraickými násobnostmi) a příslušné vlastní vektory operátoru f, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Úloha 5.10. Jaký je vztah mezi množinami vlastních čísel čtvercové matice A a matice A^T? Najděte alespoň jeden nenulový vlastní vektor libovolné permutační matice. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory horní trojúhelníkové matice, jejíž diagonální elementy jsou všechny nulové a elementy nad diagonálou všechny nenulové.

Úloha 5.11. Nechť $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je nenulový vektor. Najděte všechna vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru $s_{\mathbf{u}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definovaného pomocí vektorového součinu jako $s_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) := \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.