Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání
Verze ze dne 11. března 2022

4 Gramova matice, aplikace skalárního součinu

Cíle cvičení:

- Procvičit hledání ortogonální projekce pomocí Gramovy matice,
- naučit se počítat s ortogonální projekcí jako s lineárním zobrazením,
- počítat přibližná řešení metodou nejmenších čtverců.

Řešené příklady:

Úloha 4.1. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$. Bez použití Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace spočtěte ortogonální projekci $\mathbf{u}$ vektoru $\mathbf{v}$ na podprostor U pokud

(a) $U = \mathrm{LO}\{(1,3,-2)^T, (1,1,-1)^T\}$ a $\mathbf{v} = (2,4,3)^T$,

(b) $U = \mathrm{LO}\{(1,3,-2)^T, (1,1,-1)^T\}$ a $\mathbf{v} = (1,2,0)^T$,

Úloha 4.2. Nechť $U = \mathrm{LO}\left\{(1,1,0,1)^T, (0,1,1,-1)^T\right\}$ je podprostor reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem.

(a) Najděte ortonormální bázi prostoru $U^\perp$.

(b) Najděte ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4)$ prostoru $\mathbb{R}^4$ takovou, že $U = \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(c) Pro podprostor W prostoru $\mathbb{R}^4$ označme $P_W \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineární operátor na $\mathbb{R}^4$ odpovídající ortogonální projekci na W. Určete matice $[P_U]_B^B$ a $[P_{U^\perp}]_B^B$.

(d) Označme K kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$. Určete matice $[P_U]_K^K$ a $[P_{U^\perp}]_K^K$.

Úloha 4.3. Určete matici ortogonální projekce prostoru $\mathbb{R}^2$ na přímku $\mathrm{LO}\{(2,1)^T\}$ vzhledem ke kanonickým bázím.

Úloha 4.4. Metodou nejmenších čtverců najděte přibližné řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ nad $\mathbb{R}$, jestliže

$$(a) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad (b) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Další základní příklady k počítání:

Úloha 4.5. V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme skalární součin

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}\,.$$

Pro vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1)^T$ a $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 1)^T$ určete

(a) ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}_2$ na lineární obal vektoru $\mathbf{u}_1$,

(b) Gramovu matici posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$,

(c) ortogonální projekci vektoru $(1, 0, 0)^T$ na podprostor $\mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Úloha 4.6. Rozhodněte, zda je vektor $\hat{\mathbf{x}} = (2, -1, 1)^T$ řešením soustavy

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

metodou nejmenších čtverců. Zdůvodněte.

Rozšiřující příklady:

Hledání řešení s nejmenší normou u soustav rovnic, které mají nekonečně mnoho řešení, letos na přednášce probráno nebylo. Jde ale opět o přímočarou aplikaci ortogonální projekce, která je vysvětlena ve skriptech v části 8.6.3, a níže jsou související příklady.

Úloha 4.7. Najděte řešení $\mathbf{u}_m$ soustavy lineárních rovnic určené rozšířenou maticí

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

s nejmenší normou.

Úloha 4.8. Je některý z vektorů $(4, 4, 2, 1)^T$, $(4, 3, 3, 0)^T$ řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

s nejmenší normou? Zdůvodněte.

Úloha k zamyšlení:

Úloha 4.9. V Úloze 4.2 jsme nalezli ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4)$ prostoru $\mathbb{R}^4$. Čemu se rovná $\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_1^T + \cdots + \mathbf{v}_4\,\mathbf{v}_4^T$? Výsledek zobecněte.