Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání

Verze ze dne 24. února 2022

3 Ortogonalizace

Cíle cvičení:

- Procvičit rychlé hledání souřadnic vzhledem k ortonormální bázi (Fourierovy koeficienty),
- počítat ortogonální doplňky a ortogonální projekce,
- procvičit algoritmus Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace a určovat QR-rozklady.

Řešené příklady:

Úloha 3.1. Nechť

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

jsou vektory v reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.

(a) Ověřte, že $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^3$,

(b) spočítejte souřadnice vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ a $(1,2,3)^T$ vzhledem k ortonormální bázi B,

(c) určete ortogonální projekce vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ do podprostoru $U = \mathrm{LO}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

Úloha 3.2. V reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme podprostor

$$V = \mathrm{LO}\big\{(1,1,0)^T, (1,3,2)^T\big\}.$$

(a) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru V,

(b) najděte ortogonální bázi V obsahující vektor $(2,4,2)^T$,

(c) určete ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$, pro niž $V = \mathrm{LO}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$.

(d) určete ortogonální projekci vektoru $(2,2,-1)^T$ do podprostoru V,

Úloha 3.3. Buď $M = ((1,1,0)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T)$ báze reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte takovou ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$, aby $\mathrm{LO}\{(1,1,0)^T\} = \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1\}$ a $\mathrm{LO}\{(1,1,0)^T, (0,1,1)^T\} = \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Úloha 3.4. Najděte QR rozklady matic (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Úloha 3.5. Uvažujme standardní skalární součin na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^3$.

(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $W = \mathrm{LO}\{(1, i, 1-i)^T,\ (i, 2+i, -1)^T\}$,

(b) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(1, 0, -i)^T$ do podprostoru W.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 3.6. V prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle , \rangle$ je $B = ((1,1)^T, (2,-1)^T)$ ortonormální báze. Určete

(a) $\left\langle (1,4)^T, (2,0)^T \right\rangle$,

(b) ortogonální doplněk přímky $\mathrm{LO}\{(4,1)^T\}$.

(Nápověda: V této úloze nemáte k dispozici předpis skalárního součinu, ale zato víte, které vektory jsou kolmé. Dokážete vytvořit nějaký předpis pro neznámý skalární součin? Jak vypadá pro souřadnice vůči bázi B?)

Úloha 3.7. Skalární součin na $\mathbb{C}^2$ je dán předpisem $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}$. Najděte

(a) všechny vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (1, i)^T$,

(b) nějakou ortonormální bázi.

Úloha 3.8. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se součinem $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}$ ukažte, že se jedná o skalární součin a ortogonalizujte a normalizujte kanonickou bázi.

Úloha 3.9. Označme $P_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení, které přiřazuje vektoru jeho ortogonální projekci do prostoru U z úlohy 3.1

(a) Ukažte, že matice $[P_U]_{K_3}^{K_3}$ je $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T + \mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^T$

(b) Najděte matici $[P_U]_B^B$.

(c) Určete matice $[P_{U^\perp}]_B^B$ a $[P_{U^\perp}]_{K_3}^{K_3}$.

(d) Určete matici $[P_W]_{K_3}^{K_3}$ pro W z úlohy 3.5.