Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 7. března 2022

3 Ortogonalizace

Cíle cvičení:

- Procvičit rychlé hledání souřadnic vzhledem k ortonormální bázi (Fourierovy koeficienty),
- počítat ortogonální doplňky a ortogonální projekce,
- procvičit algoritmus Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace a určovat QR-rozklady.

Řešené příklady:

Úloha 3.1. Nechť

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

jsou vektory v reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.

(a) Ověřte, že $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^3$,

(b) spočítejte souřadnice vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ a $(1,2,3)^T$ vzhledem k ortonormální bázi B,

(c) určete ortogonální projekce vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ do podprostoru $U = \mathrm{LO}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

Řešení. (a) Podle definice spočítáme

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 3 \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{6}})^2 = 1,$$

tedy zjistili jsme, že B je ortonormální, a proto lineárně nezávislá posloupnost. Protože jde o tříprvkovou lineárně nezávislou posloupnost ve vektorovém prostoru dimenze 3, musí jít o bázi.

Mohli jsme také uvážit matici $N = (\mathbf{b}_1 \,|\, \mathbf{b}_2 \,|\, \mathbf{b}_3)$, jejíž sloupce jsou tvořeny vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$, a ověřit, že $N^T N = I_3$.

(b) Připomeňme, že pro každou ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ tvoří souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi B jednoznačně určený aritmetický vektor $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, pro který platí $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{b}_i$. Využijeme-li ortonormality báze, vidíme, že

$$\mathbf{b}_j^T \mathbf{v} = \mathbf{b}_j^T \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{b}_j^T \mathbf{b}_i = x_j,$$

tedy souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ jsou právě Fourierovy koeficienty. Konkrétně dostáváme, že

$$N^T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot\frac{1}{\sqrt3}\\1\cdot 0\\1\cdot\frac{-2}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\0\\\frac{-2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

jsou souřadnice vektoru $(0,0,1)^T$ vzhledem k bázi B,

$$N^T\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+1}{\sqrt3}\\\frac{2-1}{\sqrt2}\\\frac{2+1}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt3\\\frac{1}{\sqrt2}\\\sqrt{\frac32}\end{pmatrix}$$

jsou souřadnice vektoru $(2,1,0)^T$ vzhledem k bázi B a nakonec

$$N^T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+2+3}{\sqrt3}\\\frac{1-2}{\sqrt2}\\\frac{1+2-3\cdot 2}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt3\\-\frac{1}{\sqrt2}\\-\sqrt{\frac32}\end{pmatrix}$$

jsou souřadnice vektoru $(1,2,3)^T$ vzhledem k bázi B.

(c) V předchozí úvaze jsme zjistili, že $(0,0,1)^T=\frac{1}{\sqrt3}\mathbf{b}_1+0\mathbf{b}_2+\frac{-2}{\sqrt6}\mathbf{b}_3$, proto ortogonální projekci vektoru $(0,0,1)^T$ do U tvoří vektor $\frac{1}{\sqrt3}\mathbf{b}_1=\frac13(1,1,1)^T$.

Obdobně protože $(2,1,0)^T=\sqrt3\mathbf{b}_1+\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{b}_2+\sqrt{\frac32}\mathbf{b}_3$, je vektor $\sqrt3\mathbf{b}_1+\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{b}_2=(\frac32,\frac12,1)^T$ ortogonální projekcí vektoru $(2,1,0)^T$ do U. □

Úloha 3.2. V reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme podprostor

$$V=\mathrm{LO}\big\{(1,1,0)^T,(1,3,2)^T\big\}.$$

(a) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru V,

(b) najděte ortogonální bázi V obsahující vektor $(2,4,2)^T$,

(c) určete ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$, pro niž $V=\mathrm{LO}\{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\}$.

(d) určete ortogonální projekci vektoru $(2,2,-1)^T$ do podprostoru V,

Řešení. (a) Budeme upravovat například bázi $((1,1,0)^T,(1,3,2)^T)$ Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. Položíme nejprve $\mathbf{u}_1=\frac{1}{\|(1,1,0)^T\|}(1,1,0)^T=\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)^T$. Dále hledáme vektor $\mathbf{u}_2'$ ve tvaru $\mathbf{u}_2'=(1,3,2)^T+c\cdot\mathbf{u}_1$ (ve skriptech tomuto vektoru odpovídá vektor $\mathbf{v}_2-\mathbf{w}_2$). Z podmínky $\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_2'=0$ dostáváme, že $c=-\mathbf{u}_1^T(1,3,2)^T=-\frac{4}{\sqrt2}$, proto $\mathbf{u}_2'=(-1,1,2)^T$. Nyní vektor $\mathbf{u}_2'$ normalizujeme a dostaneme $\mathbf{u}_2=\frac{1}{\|(-1,1,2)^T\|}(-1,1,2)^T=\frac{1}{\sqrt6}(-1,1,2)^T$.

Hledanou ortonormální bází V je tedy posloupnost $(\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)^T,\frac{1}{\sqrt6}(-1,1,2)^T)$.

(b) Postupujeme obdobně jako v (a), jen zvolíme bázi V začínající vektorem $(2,4,2)^T$, například bázi $((2,4,2)^T,(1,1,0)^T)$. Budeme postupovat podobně jako v (a), tentokrát ovšem nemusíme normalizovat:

Položíme nejprve $\mathbf{u}_1=(2,4,2)^T$ a hledáme vektor $\mathbf{u}_2$ ve tvaru $\mathbf{u}_2=(1,1,0)^T+c\cdot\mathbf{u}_1$. Z podmínky $\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_2=0$ tentokrát dostáváme, že

$$c=-\frac{\mathbf{u}_1^T(1,1,0)^T}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}=-\frac{6}{24}=-\frac14,$$

proto $\mathbf{u}_2 = (1,1,0)^T - \frac{1}{4} \cdot (2,4,2)^T = \frac{1}{2}(1,0,-1)^T$.

Hledanou ortogonální bází V je tedy posloupnost $((2,4,2)^T, \frac{1}{2}(1,0,-1)^T)$ nebo také $((2,4,2)^T, (1,0,-1)^T)$.

(c) V (a) jsme nalezli ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$. Připomeňme, že každý vektor kolmý na bázi podprostoru V je kolmý na jeho všechny vektory. Stačí nám tedy najít vektor $\mathbf{u}$ takový, že $(1,1,0)\mathbf{u} = 0$ a zároveň $(1,3,2)\mathbf{u} = 0$. Ten bude řešením homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Snadno spočítáme, že řešením je například vektor $(-1,1,-1)^T$. Stačí tedy tento vektor normalizovat, abychom našli poslední vektor hledané ortonormální báze. Tedy je-li $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$, $\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)^T$, dostáváme ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ požadovaných vlastností.

(d) Souřadnice ortogonální projekce vektoru $\mathbf{v}$ na podprostor V (označme ji $\mathbf{w}$) vzhledem k ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ tohoto podprostoru jsou Fourierovy koeficienty. Tj., je-li $\mathbf{w} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2$, pak $(a_1, a_2) = (\mathbf{b}_1^T\mathbf{v}, \mathbf{b}_2^T\mathbf{v})$. Položme $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$, což je ortonormální báze nalezená v úloze (a). Spočteme, že

$$(a_1, a_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(2,2,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)(2,2,-1)^T) = (\frac{4}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T,$$

a proto

$$\mathbf{w} = \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(7,5,-2)^T.$$

□

Úloha 3.3. Buď $M = ((1,1,0)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T)$ báze reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte takovou ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$, aby $\mathrm{LO}\{(1,1,0)^T\} = \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1\}$ a $\mathrm{LO}\{(1,1,0)^T, (0,1,1)^T\} = \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Řešení. Postupujme opět Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací.

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,1,0)^T}{\|(1,1,0)^T\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$.
2. $\mathbf{v}_2' = (0,1,1)^T - \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(0,1,1)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = \frac{1}{2}(-1,1,2)^T$. Proto $\| \mathbf{v}_2' \| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.
3. Předně $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(1,1,1)^T = \sqrt{2}$ a $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)(1,1,1)^T = \frac{2}{\sqrt{6}}$, proto $\mathbf{v}_3' = (1,1,1)^T - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(1,-1,1)^T$. Tedy $\| \mathbf{v}_3' \| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

Našli jsme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T)$. □

Úloha 3.4. Najděte QR rozklady matic (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. Uvažujme obecnou matici $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_m)$ s lineárně nezávislými sloupci. Je-li $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ posloupnost ortonormálních vektorů, kterou z posloupnosti $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ vytvoříme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací a položíme-li $Q = (\mathbf{u}_1 | \dots | \mathbf{u}_m)$ a $R = (r_{ij})$, kde $r_{ij} = \mathbf{u}_i^T\mathbf{a}_j$, potom je $A = QR$ právě QR rozklad matice A. Navíc poznamenejme, že $r_{ii} = \mathbf{u}_i^T\mathbf{a}_i = \|\mathbf{u}_i'\|$, tedy matice Q sestává z výsledných ortonormálních vektorů a matice R obsahuje právě všechny údaje, které při Gramově-Schmidtově ortogonalizaci spočítáme (tedy nad diagonálou všechny potřebné skalární součiny a na diagonále všechny potřebné normy).

(a) Protože jsou sloupce první matice právě první dva vektory z úlohy 3.3, využijeme prvních dvou kroků Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace z 3.3 a sepíšeme údaje do matic

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad R = \begin{pmatrix} \|(1,1,0)^T\| & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(0,1,1)^T \\ 0 & \|\frac{1}{2}(-1,1,2)^T\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Tentokrát sepíšeme do matic údaje celé Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace z 3.3, první dva sloupce matic Q a R už známe (u prvních dvou sloupců $\mathbb{R}$ přidáme nulový poslední řádek). Tedy dostáváme

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(1,1,1)^T \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)(1,1,1)^T \\ 0 & 0 & \|\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(c) Nyní budeme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací upravovat lineárně nezávislou posloupnost vektorů $(1,1,1,1)^T$, $(1,0,1,0)^T$, $(0,1,0,2)^T$ a mezivýsledky sepisovat do matic Q a R. Všimněme si, že $r_{ii} = \mathbf{u}_i^T \mathbf{a}_i = \|\mathbf{u}_i'\|$.

1. $\mathbf{u}_1 = \frac{(1,1,1,1)^T}{\|(1,1,1,1)^T\|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ a $r_{11} = \|(1,1,1,1)^T\| = 2$.
2. $\mathbf{u}_2' = (1,0,1,0)^T - \frac{1}{2}(1,1,1,1)(1,0,1,0)^T \cdot \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$. Proto $r_{12} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)(1,0,1,0)$
1, $r_{22} = \|\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T\| = 1$ a $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
3. Konečně $r_{13} = \mathbf{u}_1^T(0,1,0,2)^T = \frac{3}{2}$, $r_{23} = \mathbf{u}_2^T(0,1,0,2)^T = -\frac{3}{2}$, proto $\mathbf{u}_3' = (0,1,0,2)^T - \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T + \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T = (0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$. Tedy $r_{33} = \|(0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\mathbf{u}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

Dostáváme QR rozklad $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$ □

Úloha 3.5. Uvažujme standardní skalární součin na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^3$.

(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $W = \mathrm{LO}\{(1, i, 1-i)^T, (i, 2+i, -1)^T\}$,

(b) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(1, 0, -i)^T$ do podprostoru W.

Řešení. (a) Využijeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci provedenou na posloupnost $\mathbf{v}_1 = (1, i, 1-i)^T$, $\mathbf{v}_2 = (i, 2+i, -1)^T$. Nejprve určíme $\mathbf{u}_1 = \frac{(1,i,1-i)^T}{\|(1,i,1-i)^T\|} = \frac{1}{2}(1, i, 1-i)^T$. Poté spočítáme $c = \mathbf{u}_1^*(i, 2+i, -1)^T = \frac{1}{2}(1, -i, 1+i) \cdot (i, 2+i, -1)^T = \frac{-2i}{2} = -i$ a dále $\mathbf{u}_2' = \mathbf{v}_2 - c\,\mathbf{u}_1 = (i, 2+i, -1)^T + \frac{i}{2}(1, i, 1-i)^T = \frac{1}{2}(3i, 3+2i, -1+i)^T$, proto $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{24}}(3i, 3+2i, -1+i)^T$.

(b) Stačí, abychom spočítali souřadnice ortogonální projekce vzhledem k ortonormální bázi prostoru W, tedy hodnoty

$$a_1 = \mathbf{u}_1^*(1, 0, -i)^T = \frac{1}{2}(1, -i, 1+i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1 + (1+i) \cdot (-i)}{2} = \frac{2-i}{2},$$

$$a_2 = \mathbf{u}_2^*(1,0,-i)^T = \frac{1}{\sqrt{24}}(-3i, 3-2i, -1-i)\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix} = \frac{-3i+i-1}{\sqrt{24}} = \frac{-1-2i}{\sqrt{24}}.$$

Tedy ortogonální projekce je vektor

$$\frac{2-i}{4}(1,i,1-i)^T + \frac{-1-2i}{24}(3i, 3+2i, -1+i)^T = \frac{1}{24}(18-9i, 7+4i, 9-17i)^T.$$

□

Další základní příklady k počítání:

Úloha 3.6. V prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle,\rangle$ je $B = ((1,1)^T, (2,-1)^T)$ ortonormální báze. Určete

(a) $\langle (1,4)^T, (2,0)^T \rangle$,

(b) ortogonální doplněk přímky $\mathrm{LO}\{(4,1)^T\}$.

(Nápověda: V této úloze nemáte k dispozici předpis skalárního součinu, ale zato víte, které vektory jsou kolmé. Dokážete vytvořit nějaký předpis pro neznámý skalární součin? Jak vypadá pro souřadnice vůči bázi B?)

Řešení: (a) $\frac{4}{3}$, (b) $(3,-3)^T$.

Úloha 3.7. Skalární součin na $\mathbb{C}^2$ je dán předpisem $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^* \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}$. Najděte

(a) všechny vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (1,i)^T$,

(b) nějakou ortonormální bázi.

Řešení: (a) $\mathrm{LO}\left\{(2+i, 5+2i)^T\right\}$, (b) Například $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{5}}(2,5)^T\right)$ nebo $\left((0,1)^T, (1,2)^T\right)$.

Úloha 3.8. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se součinem $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}$ ukažte, že se jedná o skalární součin a ortogonalizujte a normalizujte kanonickou bázi.

Řešení: Ortonormální báze získaná Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací je $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,2,0)^T, (0,1,1)^T\right)$.

Úloha 3.9. Označme $P_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení, které přiřazuje vektoru jeho ortogonální projekci do prostoru U z úlohy 3.1

(a) Ukažte, že matice $[P_U]_{K_3}^{K_3}$ je $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T + \mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^T$

(b) Najděte matici $[P_U]_B^B$.

(c) Určete matice $[P_{U^\perp}]_B^B$ a $[P_{U^\perp}]_{K_3}^{K_3}$.

(d) Určete matici $[P_W]_{K_3}^{K_3}$ pro W z úlohy 3.5.