Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání

Verze ze dne 17. února 2022

2 Skalární součin

Cíle cvičení:

- Naučit se počítat úhly a normy vektorů,
- počítat množiny kolmých vektorů,
- umět ověřit, že je zobrazení skalárním součinem.

Řešené příklady:

Úloha 2.1. Pomocí skalárního součinu najděte

(a) rovnici $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ přímky l v rovině procházející body $A = (1, -1)$ a $B = (3, 2)$;

(b) rovnici $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ roviny r v prostoru určené body $P = (1, 0, 2)$, $Q = (0, 1, 2)$ a $R = (3, 0, 1)$.

Úloha 2.2. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Spočítejte hodnoty $\| \mathbf{u} \|$, $\| \mathbf{v} \|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a určete úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(b) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$,

(c) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{v}$,

(d) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^2$ kolmé zároveň na $\mathbf{u}$ i na $\mathbf{v}$.

Úloha 2.3. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Spočítejte $\| \mathbf{u} \|$, $\| \mathbf{v} \|$ a úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(b) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$,

(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na $\mathbf{v}$,

(d) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$ kolmé zároveň na $\mathbf{u}$ i na $\mathbf{v}$.

Úloha 2.4. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Spočítejte $\| \mathbf{u} \|$, $\| \mathbf{v} \|$ a úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(b) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^4$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(c) najděte všechny vektory $\mathbf{x} = (a, b, 0, 0)^T$, které s vektorem $\mathbf{u}$ svírají úhel $\frac{\pi}{3}$,

(d) existuje-li, najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektor $\mathbf{u}$, v níž jsou každé dva různé vektory vzájemně kolmé.

Úloha 2.5. Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, definujme zobrazení $\langle , \rangle$, které dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ přiřadí hodnotu $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \, \mathbf{v}$.

(a) Dokažte, že je $\langle , \rangle$ skalární součin,

(b) spočítejte $\|\mathbf{e}_1\|$, $\|\mathbf{e}_2\|$ a $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ pro vektory kanonické báze a určete $\cos\varphi$ pro úhel φ svíraný vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$,

(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{e}_1$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle , \rangle$.

Úloha 2.6. Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -2 \end{pmatrix}$, definujme zobrazení $\langle , \rangle$, které dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z komplexního vektorového prostoru $\mathbb{C}^2$ přiřadí hodnotu $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{A}^* \mathbf{A} \, \mathbf{v}$.

(a) Dokažte, že je $\langle , \rangle$ skalární součin,

(b) spočítejte $\|\mathbf{e}_1\|$, $\|\mathbf{e}_2\|$, $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\|$, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ a $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$,

(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{C}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{e}_1$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle , \rangle$.

Další základní příklady k počítání:

Připomeňme, že *ortogonálním doplňkem množiny* X rozumíme podprostor všech vektorů kolmých na množinu X.

Úloha 2.7. Spočítejte normu polynomu $2ix + (3i - 4)$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f} g$.

Úloha 2.8. Najděte bázi ortogonálního doplňku podprostoru

$$U = \mathrm{LO}\{(1, 2, 1, 1, 1)^T, (0, -1, 1, 1, 2)^T\}$$

reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem.

Úloha 2.9. V prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem určete ortogonální doplněk roviny $\mathrm{LO}\{(3+i, -2-i, 2)^T, (2-i, -2, 1)^T\}$. Jaká je očekávaná dimenze hledaného ortogonálního doplňku? Nápověda k počítání: eliminovat od prvního sloupce je konvence, kterou je někdy výhodné opustit.

Otázky k zamyšlení

Úloha 2.10. Uvažme dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$. Jak hodnota skalárního součinu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ charakterizuje to, že vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ svírají ostrý úhel?

Úloha 2.11. V úlohách 2.1 až 2.3 vede hledání vektorů kolmých na nějakou množinu vektorů M na SLR, kde řádky matice soustavy tvoří vektory M. V minulém semestru jsme interpretovali řešení SLR jako hledání průniku nadrovin. Jde tu o různé interpretace, nebo spolu nějak souvisí?