Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 11. března 2022

2 Skalární součin

Cíle cvičení:

- Naučit se počítat úhly a normy vektorů,
- počítat množiny kolmých vektorů,
- umět ověřit, že je zobrazení skalárním součinem.

Řešené příklady:

Úloha 2.1. Pomocí skalárního součinu najděte

(a) rovnici $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ přímky l v rovině procházející body $A = (1, -1)$ a $B = (3, 2)$;

(b) rovnici $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ roviny r v prostoru určené body $P = (1, 0, 2)$, $Q = (0, 1, 2)$ a $R = (3, 0, 1)$.

Řešení. (a) Vektor $\mathbf{u}$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B má souřadnice $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Za normálový vektor přímky l můžeme zvolit libovolný vektor kolmý na vektor $\mathbf{u}$, například vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. Souřadnice normálových vektorů odpovídají koeficientům rovnice přímky l (jsou určeny jednoznačně až na násobek konstantou). Můžeme proto volit $a_1 = 3$ a $a_2 = -2$. Rovnice přímky l je potom $3x_1 - 2x - 2 = b$. Zbývá určit konstantu b. Tu najdeme dosazením souřadnic libovolného bodu přímky l. Zvolme například bod A. Dostaneme $b = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 5$. Jedna z možných rovnic přímky l je tedy $3x_1 - 2x_2 = 5$.

(b) Uvažme vektory $\mathbf{u}$ s počátečním bodem P a koncovým bodem Q a $\mathbf{v}$ s počátečním bodem P a koncovým bodem R. Spočteme, že

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Ihned nahlédneme, že jsou vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ lineárně nezávislé. (To znamená, že body P, Q, R neleží na přímce.) Normálového vektory $\mathbf{n}$ k rovině r jsou právě nenulová řešení homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Řešením je lineární obal vektoru $\mathbf{n} = (1, 1, 2)^T$. Odtud dostaneme rovnici $x_1 + x_2 + 2x_3 = b$. Dosazením souřadnic vektoru P dosteneme, že $b = 1 + 0 + 2 \cdot 2 = 5$. Rovina r je tedy určena rovnicí $x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$. □

Úloha 2.2. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Spočítejte hodnoty $\| \mathbf{u} \|$, $\| \mathbf{v} \|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a určete úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(b) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$,

(c) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{v}$,

(d) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^2$ kolmé zároveň na $\mathbf{u}$ i na $\mathbf{v}$.

Řešení. (a) Připomeňme, že je standardní skalární součin $\cdot$ na reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ definován maticovým násobením $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}$ a příslušná norma (tj. eukleidovská norma) je daná vztahem $\| \mathbf{u} \| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Proto

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad \| \mathbf{v} \| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

Označíme-li φ úhel svíraný vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, víme, že

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

tudíž $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

(b) Hledáme množinu všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ splňujících podmínku $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$, tedy množinu všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $(1, 3)$. Snadno najdeme jednoprvkovou bázi $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ tohoto podprostoru, tedy hledanou podmnožinou je právě podprostor $\mathrm{LO}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Závěrem poznamenejme, že se jedná právě o přímku s normálovým vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ procházejí počátkem, která má právě (námi řešenou) rovnici $x_1 + 3x_2 = 0$.

(c) Stejně jako v (b) hledáme parametrický popis podprostoru všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $(2, 1)$. Kterým je právě přímka $\mathrm{LO}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ s bází $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Tentokrát se ptáme, které vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ splňují podmínku $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ a zároveň $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$, což maticově zapsáno znamená, že hledáme řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hledaná množina, jak jsme mohli zjistit i geometrickou úvahou obsahuje pouze nulový vektor. $\square$

Úloha 2.3. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Spočítejte $\| \mathbf{u} \|$, $\| \mathbf{v} \|$ a úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(b) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$,

(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na $\mathbf{v}$,

(d) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$ kolmé zároveň na $\mathbf{u}$ i na $\mathbf{v}$.

Řešení. (a) Stejně jako v předchozí úloze postupujeme podle definice:

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}, \quad \| \mathbf{v} \| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

Označíme-li opět φ úhel svíraný vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, pak

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|} = \frac{-1 + 2 + 2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

tudíž $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

(b) Opět hledáme množinu všech řešení homogenní soustavy rovnic, tentokrát s maticí $\mathbf{u}^T = (-1, 1, 2)$. Obvyklým postupem určíme bázi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ tohoto podprostoru.

(c) Stejným postupem jako v části (b) najdeme bázi $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ roviny s normálovým vektorem $\mathbf{v}$ rovnicovým popisem $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

(d) Tentokrát řešíme homogenní soustavu rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Snadno najdeme jednoprvkovou bázi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. □

Úloha 2.4. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Spočítejte $\| \mathbf{u} \|$, $\| \mathbf{v} \|$ a úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(b) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^4$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(c) najděte všechny vektory $\mathbf{x} = (a, b, 0, 0)^T$, které s vektorem $\mathbf{u}$ svírají úhel $\frac{\pi}{3}$,

(d) existuje-li, najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektor $\mathbf{u}$, v níž jsou každé dva různé vektory vzájemně kolmé.

Řešení. (a) Opět jen vypočteme z definice:

$$\| \mathbf{u} \| = \| \mathbf{v} \| = \sqrt{1+1+1+1} = 2, \quad \cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

kde φ značí úhel svíraný vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, proto opět $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

(b) Řešíme soustavu rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

proto hledanou bází tvoří například posloupnost $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(c) Nejprve poznamenejme, že $(a, b)^T \neq (0, 0)^T$ a že hledáme vektory $\mathbf{x} = (a, b, 0, 0)^T$ splňující podmínku

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\| \mathbf{x} \| \| \mathbf{u} \|} = \frac{a+b}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

což je po přenásobení ekvivalentní podmínce $a + b = \sqrt{a^2 + b^2}$. Umocníme-li a odečteme-li od obou stran $a^2 + b^2$ dostáváme opět ekvivalentní podmínku

$$2ab = 0 \quad \text{a zároveň} \quad a + b > 0.$$

To je splněno, právě když $a = 0, b > 0$ nebo $a > 0, b = 0$, tedy hledané vektory leží právě v množině

$$\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}^+\}.$$

(d) Postupujeme obdobně jako v úloze (b), jen úvahu používáme induktivně a v každém kroku najdeme jen jeden nenulový kolmý vektor. Nejprve zvolíme vektor například $(0, 0, 1, 1)^T$, který je kolmý na vektor $\mathbf{u}$ a poté hledáme vektor kolmý na oba tyto vektory, tedy řešení soustavy s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

jímž je například vektor $(-1, 1, 0, 0)^T$. Nyní zbývá najít vektor kolmý na všechny tři vektor, tj. řešení

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

jímž je například $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Našli jsme bázi $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ $\square$

Úloha 2.5. Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, definujme zobrazení $\langle , \rangle$, které dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ přiřadí hodnotu $\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v}\,\rangle = \mathbf{u}^T\,\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\mathbf{v}$.

(a) Dokažte, že je $\langle , \rangle$ skalární součin,

(b) spočítejte $\|\mathbf{e}_1\|$, $\|\mathbf{e}_2\|$ a $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$ pro vektory kanonické báze a určete $\cos\varphi$ pro úhel φ svíraný vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$,

(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{e}_1$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle , \rangle$.

Řešení. (a) Podmínka linearity v obou složkách plyne okamžitě z linearity násobení maticí. Podmínka symetrie plyne ze symetrie čtvercové matice stupně jedna a symetrie matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$:

$$\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v}\,\rangle = \mathbf{u}^T\,\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \left(\mathbf{u}^T\,\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\mathbf{v}\right)^T = \mathbf{v}^T\,\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \langle\, \mathbf{v}, \mathbf{u}\,\rangle\,.$$

Zbývá si všimnout, že je matice $\mathbf{A}$ regulární, a proto $\mathbf{A}\,\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ pro všechny nenulové vektory $\mathbf{u}$. Protože je hodnota standardního skalárního součinu vektoru $\mathbf{A}\,\mathbf{u}$ se sebou rovná právě hodnotě $\mathbf{u}^T\,\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\mathbf{u}$, je ta nutně nenulová (a tedy matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitivně definitní).

(b) Spočítáme-li $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, zbývá přímočaře určit

$$\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle} = \sqrt{\mathbf{e}_1^T\mathbf{B}\mathbf{e}_1} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} = \sqrt{\mathbf{e}_2^T \mathbf{B} \mathbf{e}_2} = \sqrt{2}$$

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \mathbf{e}_1^T \mathbf{B} \mathbf{e}_2 = 1, \quad \cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle}{\|\mathbf{e}_1\|\|\mathbf{e}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

(c) Hledáme množinu všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ splňujících podmínku

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{e}_1^T \mathbf{B}\, \mathbf{x} = 0,$$

to znamená, že počítáme homogenní soustavu rovnic s maticí $(5, 1)$. Snadno najdeme jednoprvkovou bázi $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\square$

Úloha 2.6. Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -2 \end{pmatrix}$, definujme zobrazení $\langle , \rangle$, které dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z komplexního vektorového prostoru $\mathbb{C}^2$ přiřadí hodnotu $\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \,\rangle = \mathbf{u}^*\, \mathbf{A}^* \mathbf{A}\, \mathbf{v}$.

(a) Dokažte, že je $\langle , \rangle$ skalární součin,

(b) spočítejte $\|\mathbf{e}_1\|$, $\|\mathbf{e}_2\|$, $\| \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \|$, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ a $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$,

(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{C}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{e}_1$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle , \rangle$.

Řešení. (a) Uvažujeme obdobně jako v předchozí úloze. Linearita v druhé složce plyne z linearity násobení maticí, maticovým výpočtem zjistíme, že

$$\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \,\rangle^* = (\mathbf{u}^*\, \mathbf{A}^* \mathbf{A}\, \mathbf{v})^* = \mathbf{v}^*\, \mathbf{A}^* \mathbf{A}\, \mathbf{u} = \langle\, \mathbf{v}, \mathbf{u} \,\rangle\,.$$

Matice $\mathbf{A}$ je regulární, a tudíž je $\mathbf{A}\,\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ pro všechny nenulové vektory $\mathbf{u}$. Protože se hodnota $\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{u} \,\rangle$ rovná právě standardnímu skalárnímu součinu vektoru $\mathbf{A}\,\mathbf{u}$ se sebou samým, máme $\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{u} \,\rangle \in \mathbb{R}^+$.

(b) Opět nejprve určíme $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}$. Zřejmě hodnoty $\|\mathbf{e}_1\| = 1$, $\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{5}$ a $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 2i$ určíme přímo z matice $\mathbf{B}$ a snadno přímočaře spočítáme

$$\| \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \| = \|i\| \cdot \|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{5},$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = -7.$$

(c) Tentokrát hledáme množinu všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$ splňujících podmínku

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{e}_1^* \mathbf{B}\, \mathbf{x} = 0,$$

to znamená, že počítáme homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2i \end{pmatrix}$, pro kterou tvoří bázi například vektor $\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Další základní příklady k počítání:

Připomeňme, že *ortogonálním doplňkem množiny* X rozumíme podprostor všech vektorů kolmých na množinu X.

Úloha 2.7. Spočítejte normu polynomu $2ix + (3i - 4)$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f} g$.

Řešení: $\sqrt{\int_{-1}^{1}(4x^2 + 12x + 25)dx} = \sqrt{\frac{158}{3}}$.

Úloha 2.8. Najděte bázi ortogonálního doplňku podprostoru

$$U = \mathrm{LO}\{(1, 2, 1, 1, 1)^T, (0, -1, 1, 1, 2)^T\}$$

reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem.

Řešení: Například $((-3, 1, 1, 0, 0)^T, (-3, 1, 0, 1, 0)^T, (-5, 2, 0, 0, 1)^T)$.

Úloha 2.9. V prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem určete ortogonální doplněk roviny $\mathrm{LO}\{(3 + i, -2 - i, 2)^T, (2 - i, -2, 1)^T\}$. Jaká je očekávaná dimenze hledaného ortogonálního doplňku? Nápověda k počítání: eliminovat od prvního sloupce je konvence, kterou je někdy výhodné opustit.

Řešení: $\mathrm{LO}\{(1, 1 - i, -i)^T\}$.

Otázky k zamyšlení

Úloha 2.10. Uvažme dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$. Jak hodnota skalárního součinu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ charakterizuje to, že vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ svírají ostrý úhel?

Řešení: Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ svírají ostrý úhel právě když $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq 0$.

Úloha 2.11. V úlohách 2.1 až 2.3 vede hledání vektorů kolmých na nějakou množinu vektorů M na SLR, kde řádky matice soustavy tvoří vektory M. V minulém semestru jsme interpretovali řešení SLR jako hledání průniku nadrovin. Jde tu o různé interpretace, nebo spolu nějak souvisí?

Řešení: Hledání průsečíku nadrovin je ekvivalentní hledání ortogonálních doplňků jejich normál.