Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání
Verze ze dne 10. února 2022

1 Determinanty

Cíle cvičení:

- Procvičit výpočet determinantů, adjungovaných matic a užití Cramerova pravidla.

Řešené příklady:

Úloha 1.1. Spočítejte nad tělesy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinanty matic

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Úloha 1.2. Rozhodněte, pro která reálná a jsou regulární reálné matice

$$P(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(a) \cdot Q(a), \quad P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}.$$

Úloha 1.3. Uvažujme matici reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Určete adjungovanou matici $\operatorname{adj}(A)$.

(b) Určete matici A^{-1}.

(c) Určete souřadnici x_2 řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(d) Určete obsah trojúhelníku v $\mathbb{R}^2$, jehož vrcholy jsou $(0,0)^T$, $(2,3)^T$, $(5,1)^T$.

Úloha 1.4. Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete prvek na pozici $(4,1)$ její inverzní matice (bez toho, abyste počítali celou inverzní matici).

Další základní příklady k počítání:

Úloha 1.5. Určete determinanty reálných matic

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 11 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 5 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{(e)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(f)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Co se dá na základě toho o maticích říct?

Úloha 1.6. Uvažujme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Určete prvek matice A^{-1} na pozici $(2,1)$.

(b) Určete souřadnici x_2 řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Určete objem čtyřstěnu v $\mathbb{R}^3$, jehož vrcholy jsou $(0,0,0)^T$, $(1,2,2)^T$, $(1,1,3)^T$ a $(2,3,1)^T$.

Úloha 1.7. Spočítejte determinant matice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

nad tělesem racionálních čísel.

Úloha 1.8. Rozhodněte, pro která $x \in \mathbb{Z}_5$ je matice

$$\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ singulární.

Úloha 1.9. (a) Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $A\mathbf{x} = (1,0,0)^T$ s reálným parametrem a, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Použijte Cramerovo pravidlo.

(b) Vyjádřete spočtené $\det A_i$, kde A_i je matice A s i-tým sloupcem nahrazeným pravou stranou soustavy, pomocí algebraických doplňků $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ (viz definice ve skriptech). Už vidíte, že opravdu platí $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$? (Nápověda: Determinant A lze spočíst snadno pomocí determinantů A_1 až A_3. Dále $\mathbf{x} = A^{-1}(1,0,0)^T$ je první sloupec A^{-1}.)

Úloha 1.10. Určete determinant matice $n \times n$, která vznikne jako levý horní roh Pascalova trojúhelníku:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Úloha 1.11. K matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$
určete matici adjungovanou a matici inverzní.

Úloha 1.12. Určete objem rovnoběžnostěnu vytyčeného vektory $(1, 1, 0)$, $(3, 5, -2)$ a $(4, 0, 7)$.

Obtížnější příklady

Úloha 1.13. Spočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Úloha 1.14. Spočtěte determinant matice A a pomocí něj element na pozici $(1, 1)$ matice A^{-1}:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Úloha 1.15. Spočtěte determinant matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jejíž prvky jsou zadány předpisem $a_{ij} = |i - j|$.

Úloha 1.16. Uvažujme matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, v níž je obsažená $k \times l$ podmatice, která je nulová. Ukažte, že pokud $k + l > n$, musí být determinant matice A roven nule.