Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení

Verze ze dne 11. března 2022

1 Determinanty

Cíle cvičení:

- Procvičit výpočet determinantů, adjungovaných matic a užití Cramerova pravidla.

Řešené příklady:

Úloha 1.1. Spočítejte nad tělesy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinanty matic

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení. (a) Postupujeme přímo podle definice a matici označíme A. Rozmyslíme si, že $S_2 = \{\mathrm{Id}, (12)\}$, proto $\det(A) = 3\cdot 2 - 1\cdot 1 = 5$ nad tělesy $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Obvyklá úvaha o počítání v tělesech $\mathbb{Z}_p$ nám umožní využít výsledku spočítaného v tělese racionálních čísel, který nakonec stačí upravit modulo p. To znamená, že $\det(A) = 5 \bmod 5 = 0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(A) = 5 \bmod 7 = 5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(b) I tentokrát můžeme fakticky postupovat podle definice a matici označíme A. Sudým permutacím Id, (123) a (132) z S_3 odpovídají po řadě součiny $1 \cdot 1 \cdot 4$, $2 \cdot 0 \cdot 1$ a $1 \cdot 2 \cdot 4$ (vždy bereme nejprve hodnotu z prvního řádku, poté z druhého a nakonec z třetího) a lichým permutacím (12), (13) a (23) odpovídají součiny $2 \cdot 2 \cdot 4$, $1 \cdot 1 \cdot 1$ a $1 \cdot 0 \cdot 4$, proto

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = -5.$$

To znamená, že $\det(A) = -5$ nad tělesem $\mathbb{Q}$, $\det(A) = 0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(A) = 2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(c) Použijeme větu, která říká, že $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Už máme spočítaný determinant matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Nyní spočítáme determinant

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

nad $\mathbb{Q}$. Pro druhou rovnost jsme použili vztah determinantu a elementárních sloupcových úprav a pro třetí rozvoj podle druhého sloupce. Podobně jako v předchozích případech pak dostaneme $\det B = 1$ nad $\mathbb{Z}_5$ a $\det B = 6$ nad $\mathbb{Z}_7$. To znamená, že hledaný $\det(A \cdot B)$ je -30 nad tělesem $\mathbb{Q}$, 0 nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a 5 nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(d) Připomeňme, že tvrzení z přednášky nám říkají, jak se změní determinant matice, provedeme-li některou z řádkových úprav. Navíc uvědomíme, že determinantem trojúhelníkové matice je součin hodnot na hlavní diagonále. Budeme-li tedy pomocí elementárních úprav řádků převádět matici, kterou si označíme jako D, do odstupňovaného tvaru, víme v každém kroku, jak jsme původní determinant změnili. Upravujme a počítejme tedy:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5.$$

Zjistili jsme tedy, že $\det(D) = 5$ nad tělesem $\mathbb{Q}$, $\det(D) = 0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(D) = 5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

Úloha 1.2. Rozhodněte, pro která reálná a jsou regulární reálné matice

$$P(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(a) \cdot Q(a), \quad P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}.$$

Řešení. Nejprve spočítáme determinanty $\det(P(a)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = a - a^2,$ a

$$\det(Q(a)) = \det \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - 2a.$$

Tvrzení 7.22 ze skript říká, že je matice regulární, právě když je její determinant nenulový. Determinanty matic $P(a)$ a $Q(a)$ už jsme spočítali, zbývá nám s využitím Věty 7.26 spočítat $\det(P(a) \cdot Q(a)) = \det(P(a)) \cdot \det(Q(a)) = a(1-a)(1-2a)$. Vidíme, že je matice $P(a)$ regulární, právě když $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, matice $Q(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ a součin $P(a) \cdot Q(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Konečně indukční aplikací Věty 7.26 dostáváme, že

$$\det(P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}) = \det(P(a))^{257} \cdot \det(Q(a))^{374} = a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}.$$

Protože polynom $a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}$ v proměnné a nemá jiné kořeny než 0, $\frac{1}{2}$, 1, vidíme, že je matice $P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}$ regulární opět právě tehdy, když $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Úloha 1.3. Uvažujme matici reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Určete adjungovanou matici $\operatorname{adj}(A)$.

(b) Určete matici A^{-1}.

(c) Určete souřadnici x_2 řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(d) Určete obsah trojúhelníku v $\mathbb{R}^2$, jehož vrcholy jsou $(0,0)^T$, $(2,3)^T$, $(5,1)^T$.

Řešení. (a) Přímo z definice můžeme spočítat, že

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Konkrétně pro algebraické doplňky jsou $A_{11} = a_{22} = 5$, $A_{12} = -a_{21} = -4$, $A_{21} = -a_{12} = -3$ a $A_{22} = a_{11} = 2$.

(b) Věta 7.38 ve skriptech říká, že

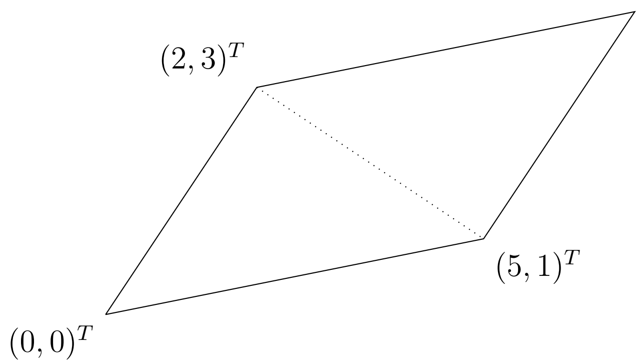
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Můžeme použít Cramerovo pravidlo (Věta 7.28). Ve značení z věty pak

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-18}{-2} = 9$.

(d) Obsah rovnoběžníku



je roven absolutní hodnotě determinantu matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy 13. Obsah trojúhelníku je poloviční, tedy $\frac{13}{2}$.

Úloha 1.4. Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete prvek na pozici $(4,1)$ její inverzní matice (bez toho, abyste počítali celou inverzní matici).

Řešení. Z Věty 7.38 víme, že kýžený prvek A^{-1} je roven $\frac{A_{14}}{\det(A)}$. Všimneme si, že

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{a} \qquad \det(A) = -5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 5A_{14}.$$

(použili jsme rozvoj $\det(A)$ podle prvního řádku). Vyjde tedy $\frac{1}{5}$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 1.5. Určete determinanty reálných matic

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 11 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 5 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\text{(e)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(f)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Co se dá na základě toho o maticích říct?

Řešení: (a) -9, (b) 120, (c) 120, (d) 0, (e) 0, (f) 130. Matice (d) a (e) jsou singulární, ostatní jsou regulární.

Úloha 1.6. Uvažujme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Určete prvek matice A^{-1} na pozici $(2,1)$.

(b) Určete souřadnici x_2 řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Určete objem čtyřstěnu v $\mathbb{R}^3$, jehož vrcholy jsou $(0,0,0)^T$, $(1,2,2)^T$, $(1,1,3)^T$ a $(2,3,1)^T$.

Řešení: (a) $\frac{5}{4}$, (b) $\frac{11}{4}$, (c) $\frac{2}{3}$. V bodě (c) můžete využít toho, že čtyřstěn s vrcholy $\mathbf{o}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$ má objem $\frac{1}{6}$ a najít lineární zobrazení, které tento čtyřstěn převede na ten ze zadání.

Úloha 1.7. Spočítejte determinant matice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

nad tělesem racionálních čísel.

Řešení: Vyjde -344. Práci si výrazně usnadníme, odečteme-li první sloupec od čtvrtého.

Úloha 1.8. Rozhodněte, pro která $x \in \mathbb{Z}_5$ je matice

$$\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ singulární.

Řešení: Je singulární, právě když je $x = 3$.

Úloha 1.9. (a) Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $A\mathbf{x} = (1,0,0)^T$ s reálným parametrem a, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Použijte Cramerovo pravidlo.

(b) Vyjádřete spočtené $\det A_i$, kde A_i je matice A s i-tým sloupcem nahrazeným pravou stranou soustavy, pomocí algebraických doplňků $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ (viz definice ve skriptech). Už vidíte, že opravdu platí $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$? (Nápověda: Determinant A lze spočíst snadno pomocí determinantů A_1 až A_3. Dále $\mathbf{x} = A^{-1}(1,0,0)^T$ je první sloupec A^{-1}.)

Řešení: $x_1 = x_2 = \frac{2a}{2a(a+1)} = \frac{1}{a+1}$ a $x_3 = \frac{-2a}{2a(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$ pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, řešení neexistuje pro $a = -1$ a $(1,0,0)^T + \mathrm{LO}\{(0,1,-1)^T\}$ pro $a = 0$.

Úloha 1.10. Určete determinant matice $n \times n$, která vznikne jako levý horní roh Pascalova trojúhelníku:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Řešení: 1 pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 1.11. K matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

určete matici adjungovanou a matici inverzní.

Úloha 1.12. Určete objem rovnoběžnostěnu vytyčeného vektory $(1,1,0)$, $(3,5,-2)$ a $(4,0,7)$.

Obtížnější příklady

Úloha 1.13. Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Úloha 1.14. Spočtěte determinant matice A a pomocí něj element na pozici $(1,1)$ matice A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Úloha 1.15. Spočtěte determinant matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jejíž prvky jsou zadány předpisem $a_{ij} = |i - j|$.

Úloha 1.16. Uvažujme matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, v níž je obsažená $k \times l$ podmatice, která je nulová. Ukažte, že pokud $k + l > n$, musí být determinant matice A roven nule.