O složitosti $\mathbb{H}$-barvení digrafů

Libor Barto

+ Marcin Kozik, Todd Niven

Katedra algebry
MFF
Univerzita Karlova v Praze

STTI 2009

$\mathbb{H}$-barvení

$\mathbb{H}$: digraf $\quad \mathbb{H} = (V, E),\ E \subseteq V \times V$

$\mathbb{H}$-barvení

$\mathbb{H}$: digraf $\quad \mathbb{H} = (V, E),\ E \subseteq V \times V$

Definice ($\mathbb{H}$-barvení)

VSTUP: *Digraf* $\mathbb{G}$

OTÁZKA: *Existuje homomorfismus* $\mathbb{G} \to \mathbb{H}$*?*

Homomorfismus = zobrazení mezi vrcholy, které zachovává hrany

$\mathbb{H}$-barvení

$\mathbb{H}$: digraf $\quad \mathbb{H} = (V, E),\ E \subseteq V \times V$

Definice ($\mathbb{H}$-barvení)

VSTUP: *Digraf* $\mathbb{G}$

OTÁZKA: *Existuje homomorfismus* $\mathbb{G} \to \mathbb{H}$*?*

Homomorfismus = zobrazení mezi vrcholy, které zachovává hrany

Příklady

- 2-*barvení*, 3-*barvení*, ...
- 3-*SAT*, ...
- *Řešení soustav rovnic (např. lineárních)*

Složitost $\mathbb{H}$-barvení

Hypotéza (Feder, Vardi 98)

Platí dichotomie: Pro libovolný digraf $\mathbb{H}$ *je* $\mathbb{H}$*-barvení buď polynomiálně řešitelný, nebo NP-úplný problém.*

Složitost $\mathbb{H}$-barvení

Hypotéza (Feder, Vardi 98)

Platí dichotomie: Pro libovolný digraf $\mathbb{H}$ je $\mathbb{H}$-barvení buď polynomiálně řešitelný, nebo NP-úplný problém.

Kanditát na nejširší přirozenou třídu problému v NP, kde platí dichotomie.

Složitost $\mathbb{H}$-barvení

Hypotéza (Feder, Vardi 98)

Platí dichotomie: Pro libovolný digraf $\mathbb{H}$ je $\mathbb{H}$-barvení buď polynomiálně řešitelný, nebo NP-úplný problém.

Kanditát na nejširší přirozenou třídu problému v *NP*, kde platí dichotomie.

Při studiu složitosti BÚNO předpokládáme, že $\mathbb{H}$ je core: Neexistuje homomorfismus z $\mathbb{H}$ na menší indukovaný pod-digraf.

Algebra je nejlepší

Definice

f je n-ární polymorfismus digrafu $\mathbb{H}$, pokud f je homomorfismus $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$

Algebra je nejlepší

Definice

f je n-ární polymorfismus digrafu $\mathbb{H}$, pokud f je homomorfismus $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$, tj.

zobrazení $f : V^n \to V$, pro které

$$\forall a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$$

$$(a_1, b_1) \in E, \ \ (a_2, b_2) \in E, \ \ \ldots, \ \ (a_n, b_n) \in E$$

$$\Rightarrow$$

$$(f(a_1, \ldots, a_n), \ f(b_1, \ldots, b_n)) \in E$$

Algebra je nejlepší

Definice

f je n-ární polymorfismus digrafu $\mathbb{H}$, pokud f je homomorfismus $\mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$

Věta (Cohen, Jeavons, Gyssens, Bulatov, Krokhin cca 00)

Složitost $\mathbb{H}$-barvení záleží pouze na množině polymorfismů $\mathbb{H}$!
Dokonce jen na rovnostech, které polymorfismy splňují!

Algebra je nejlepší

Definice

f je n-ární polymorfismus digrafu $\mathbb{H}$, pokud f je homomorfismus $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$

Věta (Cohen, Jeavons, Gyssens, Bulatov, Krokhin cca 00)

Složitost $\mathbb{H}$-barvení záleží pouze na množině polymorfismů $\mathbb{H}$!
Dokonce jen na rovnostech, které polymorfismy splňují!

Důsledek: Jistá podmínka (BJK) na polymorfismy $\mathbb{H}$

$\mathbb{H}$ nesplňuje (BJK) $\Rightarrow$ $\mathbb{H}$-barvení je *NP*-úplné.

Algebra je nejlepší

Definice

f je n-ární polymorfismus digrafu $\mathbb{H}$, pokud f je homomorfismus $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$

Věta (Cohen, Jeavons, Gyssens, Bulatov, Krokhin cca 00)

Složitost $\mathbb{H}$-barvení záleží pouze na množině polymorfismů $\mathbb{H}$!
Dokonce jen na rovnostech, které polymorfismy splňují!

Důsledek: Jistá podmínka (BJK) na polymorfismy $\mathbb{H}$

$\mathbb{H}$ nesplňuje (BJK) $\Rightarrow$ $\mathbb{H}$-barvení je *NP*-úplné.

Hypotéza (Bulatov, Jeavons, Krokhin)

$\mathbb{H}$ splňuje (BJK) $\Rightarrow$ $\mathbb{H}$-barvení je polynomiální. (Jinak je NP-úplné.)

Podmínka (BJK)

Věta

$\mathbb{H}$ *digraf. Následující podmínky jsou ekvivalentní*

- *(BJK)*

Podmínka (BJK)

Věta

$\mathbb{H}$ *digraf. Následující podmínky jsou ekvivalentní*

- *(BJK)*
- *Maróti, McKenzie 06*

  $\mathbb{H}$ *má weak near-unanimity (WNU) polymorfismus* w*:*

  - $w(x, x, \ldots, x) = x$
  - $w(x, x, \ldots, x, y) = w(x, x, \ldots, x, y, x) = \cdots = w(y, x, x, \ldots, x)$.

Podmínka (BJK)

Věta

$\mathbb{H}$ *digraf. Následující podmínky jsou ekvivalentní*

- *(BJK)*
- *Maróti, McKenzie 06*

  $\mathbb{H}$ *má weak near-unanimity (WNU) polymorfismus* w*:*
  - $w(x, x, \ldots, x) = x$
  - $w(x, x, \ldots, x, y) = w(x, x, \ldots, x, y, x) = \cdots = w(y, x, x, \ldots, x).$
- *Barto, Kozik 09*

  $\mathbb{H}$ *má pro každé prvočíslo* $p > |V|$ *cyklický polymorfismus* t*:*
  - $t(x, x, \ldots, x) = x$
  - $t(x_1, x_2, \ldots, x_p) = t(x_2, \ldots, x_p, x_1)$

Podmínka (BJK)

Věta

$\mathbb{H}$ *digraf. Následující podmínky jsou ekvivalentní*

- *(BJK)*
- *Maróti, McKenzie 06*

  $\mathbb{H}$ *má weak near-unanimity (WNU) polymorfismus* w*:*
  - $w(x, x, \dots, x) = x$
  - $w(x, x, \dots, x, y) = w(x, x, \dots, x, y, x) = \dots = w(y, x, x, \dots, x)$.
- *Barto, Kozik 09*

  $\mathbb{H}$ *má pro každé prvočíslo* $p > |V|$ *cyklický polymorfismus* t*:*
  - $t(x, x, \dots, x) = x$
  - $t(x_1, x_2, \dots, x_p) = t(x_2, \dots, x_p, x_1)$

Nejlepší nástroj k důkazům *NP*-úplnosti.

Symetrické digrafy (=grafy)

Věta (Hell, Nešetřil 90)

$\mathbb{H}$ *symetrický digraf, core. Pokud* $\mathbb{H}$ *má nanejvýš dva vrcholy, pak* $\mathbb{H}$*-barvení je polynomiální. Jinak je NP-úplné.*

Symetrické digrafy (=grafy)

Věta (Hell, Nešetřil 90)

$\mathbb{H}$ *symetrický digraf, core. Pokud* $\mathbb{H}$ *má nanejvýš dva vrcholy, pak* $\mathbb{H}$*-barvení je polynomiální. Jinak je NP-úplné.*

Důkaz.

- Polynomiální část je jednoduchá.

□

Symetrické digrafy (=grafy)

Věta (Hell, Nešetřil 90)

$\mathbb{H}$ *symetrický digraf, core. Pokud* $\mathbb{H}$ *má nanejvýš dva vrcholy, pak* $\mathbb{H}$*-barvení je polynomiální. Jinak je NP-úplné.*

Důkaz.

- Polynomiální část je jednoduchá.
- Druhá teď taky:
  - Zvolíme dostatečně velké prvočíslo $p > |V|$. Stačí vyvrátit existenci cyklického p-árního polymorfismu t

□

Symetrické digrafy (=grafy)

Věta (Hell, Nešetřil 90)

$\mathbb{H}$ symetrický digraf, core. Pokud $\mathbb{H}$ má nanejvýš dva vrcholy, pak $\mathbb{H}$-barvení je polynomiální. Jinak je NP-úplné.

Důkaz.

- Polynomiální část je jednoduchá.
- Druhá teď taky:
  - Zvolíme dostatečně velké prvočíslo $p > |V|$. Stačí vyvrátit existenci cyklického p-árního polymorfismu t
  - Najdeme uzavřenou cestu $a_1, a_2, \ldots, a_p, a_1$

□

Symetrické digrafy (=grafy)

Věta (Hell, Nešetřil 90)

$\mathbb{H}$ symetrický digraf, core. Pokud $\mathbb{H}$ má nanejvýš dva vrcholy, pak $\mathbb{H}$-barvení je polynomiální. Jinak je NP-úplné.

Důkaz.

- Polynomiální část je jednoduchá.
- Druhá teď taky:
  - Zvolíme dostatečně velké prvočíslo $p > |V|$. Stačí vyvrátit existenci cyklického p-árního polymorfismu t
  - Najdeme uzavřenou cestu $a_1, a_2, \dots, a_p, a_1$
  - $(a_1, a_2) \in E, (a_2, a_3) \in E, \dots, (a_p, a_1) \in E$. Takže $(t(a_1, a_2, \dots, a_p), t(a_2, \dots, a_p, a_1)) \in E$

□

Symetrické digrafy (=grafy)

Věta (Hell, Nešetřil 90)

$\mathbb{H}$ *symetrický digraf, core. Pokud* $\mathbb{H}$ *má nanejvýš dva vrcholy, pak* $\mathbb{H}$*-barvení je polynomiální. Jinak je NP-úplné.*

Důkaz.

- Polynomiální část je jednoduchá.
- Druhá teď taky:
  - Zvolíme dostatečně velké prvočíslo $p > |V|$. Stačí vyvrátit existenci cyklického p-árního polymorfismu t
  - Najdeme uzavřenou cestu $a_1, a_2, \ldots, a_p, a_1$
  - $(a_1, a_2) \in E, (a_2, a_3) \in E, \ldots, (a_p, a_1) \in E$. Takže $(t(a_1, a_2, \ldots, a_p), t(a_2, \ldots, a_p, a_1)) \in E$
  - t je cyklický $\Rightarrow$ máme smyčku, spor.

$\square$

Dichotomie pro digrafy bez zdrojů a stoků

Věta (Hell, Nešetřil 90)

$\mathbb{H}$ *symetrický digraf, core. Pokud* $\mathbb{H}$ *má nanejvýš dva vrcholy, pak* $\mathbb{H}$*-barvení je polynomiální. Jinak je NP-úplné.*

Věta (Barto, Kozik, Niven 08)

$\mathbb{H}$ *digraf bez zdrojů a stoků, core. Pokud* $\mathbb{H}$ *je disjunktním sjednocením cyklů, pak* $\mathbb{H}$*-barvení je polynomiální. Jinak je NP-úplné.*

Algoritmy pro $\mathbb{H}$-barvení

Existují dvě skupiny polynomiálních algoritmů

Algoritmy pro $\mathbb{H}$-barvení

Existují dvě skupiny polynomiálních algoritmů

- Zobecnění Gaussovy eliminace
    - Bulatov, Dalmau, Berman, Idziak, Marković, McKenzie, Valeriote, Willard

Algoritmy pro $\mathbb{H}$-barvení

Existují dvě skupiny polynomiálních algoritmů

- Zobecnění Gaussovy eliminace
  - Bulatov, Dalmau, Berman, Idziak, Marković, McKenzie, Valeriote, Willard
  - Už víme přesně, kdy lze použít

Algoritmy pro $\mathbb{H}$-barvení

Existují dvě skupiny polynomiálních algoritmů

- Zobecnění Gaussovy eliminace
  - Bulatov, Dalmau, Berman, Idziak, Marković, McKenzie, Valeriote, Willard
  - Už víme přesně, kdy lze použít
- Testy lokální konzistence ("vylučovací metoda")
  - všichni

Algoritmy pro $\mathbb{H}$-barvení

Existují dvě skupiny polynomiálních algoritmů

- Zobecnění Gaussovy eliminace
  - Bulatov, Dalmau, Berman, Idziak, Marković, McKenzie, Valeriote, Willard
  - Už víme přesně, kdy lze použít
- Testy lokální konzistence ("vylučovací metoda")
  - všichni
  - Larose, Zádori 06 + Maróti, McKenzie 06
    Pokud lze použít, pak $\mathbb{H}$ má WNU polymorfismy skoro všech arit

Algoritmy pro $\mathbb{H}$-barvení

Existují dvě skupiny polynomiálních algoritmů

- Zobecnění Gaussovy eliminace
  - Bulatov, Dalmau, Berman, Idziak, Marković, McKenzie, Valeriote, Willard
  - Už víme přesně, kdy lze použít
- Testy lokální konzistence ("vylučovací metoda")
  - všichni
  - Larose, Zádori 06 + Maróti, McKenzie 06
    Pokud lze použít, pak $\mathbb{H}$ má WNU polymorfismy skoro všech arit
  - Barto, Kozik 08,09 Podmínka je postačující!

Algoritmy pro $\mathbb{H}$-barvení

Existují dvě skupiny polynomiálních algoritmů

- Zobecnění Gaussovy eliminace
  - Bulatov, Dalmau, Berman, Idziak, Marković, McKenzie, Valeriote, Willard
  - Už víme přesně, kdy lze použít
- Testy lokální konzistence ("vylučovací metoda")
  - všichni
  - Larose, Zádori 06 + Maróti, McKenzie 06
    Pokud lze použít, pak $\mathbb{H}$ má WNU polymorfismy skoro všech arit
  - Barto, Kozik 08,09 Podmínka je postačující!
  - Takže už také víme přesně, kdy lze použít

Algoritmy pro $\mathbb{H}$-barvení

Existují dvě skupiny polynomiálních algoritmů

- Zobecnění Gaussovy eliminace
  - Bulatov, Dalmau, Berman, Idziak, Marković, McKenzie, Valeriote, Willard
  - Už víme přesně, kdy lze použít
- Testy lokální konzistence (“vylučovací metoda”)
  - všichni
  - Larose, Zádori 06 + Maróti, McKenzie 06
    Pokud lze použít, pak $\mathbb{H}$ má WNU polymorfismy skoro všech arit
  - Barto, Kozik 08,09 Podmínka je postačující!
  - Takže už také víme přesně, kdy lze použít
- Děkuji za pozornost!!!