Šturmova srovnávací věta

Srovnávací věta se týká nulových bodů rovnic 2. řádu. Umožňuje odhadnout jejich rozložení srovnáním s jinou rovnicí.

Věta 1. *Nechť y je netriviální řešení rovnice*

$$y'' + q_1(t)y = 0 \tag{1}$$

a $t_0 < t_1$ jsou jeho sousední nulové body. Nechť z je řešení rovnice

$$z'' + q_2(t)z = 0 \tag{2}$$

přičemž

$$q_2(t) \geq q_1(t) \ \text{v}\ [t_0, t_1]. \tag{3}$$

Potom z má v $[t_0, t_1]$ alespoň jeden nulový bod. Dodatek: je-li nerovnost (3) *někde ostrá, má z nulový bod dokonce v (t_0, t_1).*

Poznámka. Názorná pomůcka k zapamatování: rovnice popisují pohyb pružiny $y'' = -qy$, tj. síla působí proti vychýlení, a q je koeficient tuhosti pružiny.[1] Klíčový předpoklad (3) tedy říká, že druhá pružina má větší tuhost, a pochopitelný závěr je, že z kmitá alespoň tak často jako y.

Důkaz. Předběžná úvaha: BÚNO $y > 0$ v (t_0, t_1) – jinak přejdu k $-y$. Dále tvrdím, že $y'(t_0) > 0$, neboť $y'(t_0) < 0$ by bylo ve sporu se znaménkem y na pravém okolí t_0. Nemůže být ani $y'(t_0) = 0$, protože máme rovnici 2. řádu a podmínka $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ jednoznačně určuje triviální řešení $y \equiv 0$, což je spor s předpokladem. Podobně se ukáže, že $y'(t_1) < 0$.

Nyní postupujeme sporem a předpokládáme, že $z \neq 0$ v $[t_0, t_1]$, BÚNO $z > 0$. Rovnici (1) násobíme z, rovnici (2) y, odečteme a integrujeme přes (t_0, t_1). Protože

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} y''z - z''y \, dt &= \big[y'z - z'y\big]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} y'z' - z'y' \, dt \\ &= y'(t_1)z(t_1) - y'(t_0)z(t_0)\,,\end{aligned}$$

je celkem

$$\underbrace{y'(t_1)}_{<0} z(t_1) + \underbrace{\big(- y'(t_0)\big)}_{<0} z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \big(q_2 - q_1\big) yz \, dt \tag{4}$$

[1] Který ovšem může být i záporný.

Integrál vpravo je díky (3) nezáporný, levá strana záporná, neboť $z(t_0) > 0$, $z(t_1) > 0$. To je kýžený spor.

Důkaz dodatku. Potřebujeme přivést ke sporu slabší předpoklad $z > 0$ v (t_0, t_1). Ze spojitosti tedy $z(t_0) \geq 0$, $z(t_1) \geq 0$ a levá strana v (4) je nekladná. Naproti tomu integrand napravo je nezáporný, spojitý a alespoň někde v (t_0, t_1) ostře kladný, tedy celkem kladný. To je spor. $\square$

Poznámka. Důkaz projde úplně stejně pro obecnější rovnice tvaru

$$\big(p(t)y'\big)' + q(t)y = 0\,, \tag{5}$$

kde $p > 0$. Obecná rovnice 2. řádu

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$$

se dá převést na tvar (5) či (1) přinásobením vhodným „integračním faktorem", nebo substitucí; viz úloha 1 níže.

Příklad 1. Nechť y je netriviální řešení rovnice $y'' + (1 - t^2)y = 0$. Potom y má nejvýše tři nulové body.

Řešení. Označme $q(t) = 1 - t^2$. V intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, +\infty)$ je $q(t) \leq 0$. Tudíž obsahují nejvýše jeden nulový bod (viz úloha 4 níže). – Naproti tomu v $[-1, 1]$ je $q(t) \leq 1$; tedy sousední nulové body jsou vzdáleny alespoň π (viz úloha 3 níže). Pročež i sem se vejde nejvýše jeden.

Úlohy

1. Nechť $y''+p(t)y'+q(t)y=0$. Určete funkci $u=u(t)$ tak, aby při substituci $y=u(t)z$ měla rovnice pro z tvar $z''+Q(t)z=0$. Vyjádřete $Q(t)$ pomocí $p(t)$, $q(t)$.

2. Nulové body každého netriviálního řešení rovnice $y''+py'+qy=0$ tvoří izolovanou množinu. Speciálně: má smysl hovořit o „sousedních" nulových bodech.

3. Nechť $y=y(t)$ je netriviální řešení rovnice $y''+q(t)y=0$, nechť $a>0$ je pevné číslo, I je interval.

(i) jestliže $q(t)\geq a$ pro $t\in I$, pak sousední nulové body y ležící v I jsou vzdáleny nejvýše $\pi/\sqrt{a}$.

(ii) jestliže $q(t)\leq a$ pro $t\in I$, pak sousední nulové body y ležící v I jsou vzdáleny alespoň $\pi/\sqrt{a}$.

4. Nechť y je netriviální řešení rovnice $y''+a(t)y=0$, nechť $a(t)\leq 0$ pro každé t v intervalu I. Potom y má v I nejvýše jeden nulový bod. – Dokažte (i) pomocí Šturmovy věty (ii) na základě elementárních úvah.

5. Uvažujte rovnici $y''+q(t)y=0$ v intervalu $(K,+\infty)$, kde $K>0$.

(i) jestliže $q(t)\leq \frac{1}{4t^2}$, pak netriviální řešení má nejvýše jeden nulový bod

(ii) jestliže $q(t)\geq \frac{1}{ct^2}$, kde $c<4$, pak každé řešení má nekonečně nulových bodů

6. Každé řešení rovnice $y''+\frac{1}{1+\sqrt{t}}y=0$ má v intervalu $(0,+\infty)$ nekonečně nulových bodů.

7. Každé netriviální řešení rovnice $y''+2y'/t+e^ty=0$ má v $(0,\infty)$ nekonečně nulových bodů. Rozdíl sousedních se blíží k 0 pro $t\to\infty$.

8. Každé netriviální řešení rovnice $ty''+2y'+(t+\sin t)y=0$ má v $(0,\infty)$ nekonečně nulových bodů. Rozdíl sousedních se blíží k 1 pro $t\to\infty$.

9. Uvažujte po řadě rovnice:

(i) $y''+t^2y=0$

(ii) $y''+e^{2t}y=0$

(iii)* $y''+y/t=0$

Nechť y je netriviální řešení, $t_0\in(0,\infty)$ je nulový bod. Ukažte, že existuje nulový bod $t_1>t_0$ a odvoďte co nejpřesnější (horní a dolní) odhad vzdálenosti $\Delta=t_1-t_0$.

10. Ukažte, že netriviální řešení rovnice $y''+(\sin t)y=0$ má v intervalu $[-\pi,\pi]$ nejvýše dva nulové body.

11. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' - ty' + y = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše pět nulových bodů.

12. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + t/2y' + y \operatorname{arctg} t = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše čtyři nulové body.

13. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + e^t y' + e^t y/2 = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše jeden nulový bod.

14. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + 2ty' + 4ty = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše čtyři nulové body.

15. Nechť $x(t)$ je libovolné netriviální řešení rovnice $t^2 x'' + (256 + t^4)^{1/2} x = 0$. Odhadněte počet počet nulových bodů funkce $x(t)$ v $(0, \delta)$ pro $\delta > 0$ malé. Dále dokažte, že $x(t)$ má nekonečně nul v každém okolí $+\infty$. Dokážete přesněji popsat jejich chování pro $t \to +\infty$?

16. Nechť $x(t)$ je libovolné netriviální řešení rovnice $x'' + Q(t)x = 0$, kde $Q(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} t - t^2$. Odvoďte horní odhad počtu nulových bodů $x(t)$ v $\mathbb{R}$.

17. Nechť $x(t)$ je řešení rovnice $x'' + Q(t)x = 0$, kde $Q(t) = 2t/(1 + t^2)$, s počáteční podmínkou $x(0) = 0$, $x'(0) > 0$. Předpokládejte, že existují další nulové body $t_2 > t_1 > 0$ a odhadněte *zdola* t_1 a $t_2 - t_1$. Ukažte srovnáním s vhodnou rovnicí, že $x(t)$ má v $(0, \infty)$ nekonečně nulových bodů (a tedy předpoklad výše je ospravedlněný).

Řešení

1) $u = \exp(-\int p/2)$, $Q = -p^2/4 - p'/2 + q$.

2) Je-li t_0 hromadný bod množiny $\{t \in I;\ y(t) = 0\}$, pak $y(t_0) = 0$ ze spojitosti. Navíc $y'(t_0) = 0$, neboť $y'(t_0) \neq 0$ implikuje, že $y \neq 0$ na jistém $P(t_0)$. Pro rovnici 2. řádu podmínka $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ určuje triviální řešení, spor.

3) Srovnejte s $z'' + a^2 z = 0$, kde řešení mají tvar $z_c(t) = \sin[a(t-c)]$.

4) Nechť $t_0 < t_1$ jsou sousední nulové body y. (i) Každé řešení rovnice $z'' + 0z = 0$ by mělo v $[t_0, t_1]$ nulový bod – spor. (ii) BÚNO navíc $y > 0$ na (t_0, t_1), ovšem pak y je konvexní v $[t_0, t_1]$, což není možné.

5) Srovnejte s Eulerovou rovnicí $t^2 z'' + dz = 0$, jejíž řešení má nekonečně nulových bodů pokud $d > 1/4$, a nemá obecně žádné nulové body, jestliže $d \leq 1/4$

6) Užijte předchozí bod (ii) předchozího cvičení na intervalu $(K, +\infty)$ pro vhodné velké $K > 0$

7) Substituce $y(t) = z(t)/t$ (viz cvičení 1) vede na rovnici $z'' + e^t z = 0$. Srovnejte s $w'' + a^2 w = 0$ pro velké a^2 a užijte cvičení 3.

8) Pomocí cvičení 1 převeďte na rovnici $z'' + Q(t)z = 0$, kde $Q(t) = 1 + \sin t/t$. Užijte cvičení 3.

9) Aplikujeme výsledky cvičení 3. (i) $q(t) = t^2 \geq t_0^2$ na $[t_0, \infty)$, odtud $\Delta \leq \pi/t_0$. Naproti tomu $q(t) \leq (t_1)^2 \leq (t_0 + \pi/t_0)^2$ na $[t_0, t_1]$, tedy $\Delta \geq \pi/(t_0 + \pi/t_0)$. (ii) $q(t) = e^{2t} \geq e^{2t_0}$ na $[t_0, \infty)$, odtud $\Delta \leq \pi e^{-t_0}$. Naproti tomu $q(t) \leq e^{2t_1} \leq e^{2(t_0 + \pi e^{-t_0})}$ na $[t_0, t_1]$, tedy $\Delta \geq \pi e^{-(t_0 + \pi e^{-t_0})}$. (iii) $q(t) \leq 1/t_0$ na $[t_0, \infty)$, tedy $\Delta \geq \pi\sqrt{t_0}$. Ansatz: hledejme t_1 v intervalu $I := [t_0, t_0 + \pi\sqrt{t_0} + \delta]$, kde $\delta > 0$ je pevné. Protože $q(t) \geq 1/(t_0 + \pi\sqrt{t_0} + \delta)$ v I, je $t_1 - t_0 \leq \pi\sqrt{t_0 + \pi\sqrt{t_0} + \delta}$, což je (ospravedlnění Ansatzu!) menší než $\pi\sqrt{t_0} + \delta$ pro δ ne příliš malé.

10) Protože $q(t) = \sin t \leq 1$, je vzdálenost sousedních bodů alespoň π, viz cvičení 3. Tedy tři nulové body mohou být pouze $-\pi$, 0 a π. Leč $q(t) \leq 0$ v $[-\pi, 0]$, pročež tento interval obsahuje nejvýše jeden nulový bod (cvičení 4) – spor.

11) Pomocí cvičení 1 převeďte na $z'' + q(t)z = 0$, kde $q(t) = 3/2 - t^2/4$. Na intervalech $(-\infty, -\sqrt{6}]$, $[\sqrt{6}, +\infty)$ je $q(t) \leq 0$, tedy obsahují nejvýše po jednom nulovém bodu (viz cvičení 4). Na $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ je $q(t) \leq 3/2$; odtud (a díky cvičení 3ii) se sem vejdou nejvýše dva.

12) Pomocí cvičení 1 převeďte na $z'' + q(t)z = 0$, kde $q(t) = \operatorname{arctg} t - 1/4 - t^2/16$. Protože $\operatorname{arctg} t \leq \pi/2$, a dokonce ≤ 0 pro $t \leq 0$, je $q(t) \leq 0$ mimo $[0, M]$ a $q(t) \leq \pi/2$ na $[0, M]$, kde $M = 4\sqrt{\pi/2 - 1/4}$. Dále jako v předchozím cvičení.

13) Užijte cvičení 1 (vyjde $Q = -e^{2t}/2$) a cvičení 4.

14) Pomocí cvičení 1 převeďte na $z'' + q(t)z = 0$, kde $q(t) = -t^2 + 4t - 1$. Tedy $q(t) \leq 3$ na $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$, kam se tudíž vejdou nejvýše dvě nuly díky cvičení 3, zatímco $q \leq 0$ mimo tento interval a užijeme cvičení 4.

15) V okolí nuly srovnáme s Eulerovou rovnicí $t^2 y'' + 16y = 0$, která má řešení tvaru $t^{1/2}\sin(c \ln t)$, kde $c = 3\sqrt{7}/2$; tato funkce má zřejmě nekonečně nulových bodů v každém okolí $(0, \delta)$ a totéž plyne pro $x(t)$. Pro $t \to +\infty$ užijeme úlohu 3, kde $q(t) \to 1$, tedy vzdálenost sousedních bodů se blíží jedné.

16) Protože $\operatorname{arctg} t \leq \frac{\pi}{2}$ všude a ≤ 0 pro $t \leq 0$, je $Q(t) \leq 0$ na $(-\infty, 0]$ a na $[1, \infty)$. Zde je nejvýše po jednom nulovém bodu, viz úloha 4. Na intervalu $[0, 1]$ je $Q(t) \leq 1$; sousední nulové body jsou tedy vzdáleny aspoň π, a tedy se sem vejde nejvýše jeden.

17) Protože $Q(t) \leq 1$, je $t_1 \geq \pi$ dle úlohy 3. Odsud $Q(t) \leq Q(\pi)$ na $[t_1, \infty)$, tedy $t_2 - t_1 \geq \pi/\sqrt{Q(\pi)} = \sqrt{\pi(1+\pi^2)/2}$. Dále užijte výsledek úlohy 5ii).

Aplikace – nulové body Besselovy funkce.

Pomocí srovnávací věty se dá určit asymptotické rozložení nulových bodů Besselovy funkce v okolí nekonečna.

Definice. Besselovou funkcí 1. druhu (s indexem $s \in \mathbb{R}$) rozumíme

$$J_s(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

Řada konverguje (s konvencí $1/\Gamma(-n) = 0$) pro $t \in (0,\infty)$ a splňuje zde Besselovu rovnici

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - s^2) y = 0\,. \tag{6}$$

Věta 2. *Funkce $J_s(t)$ má v $(0,\infty)$ nekonečně nulových bodů. Vzdálenost sousedních se blíží k π pro $t \to \infty$.*

Nejprve si dokážeme pomocné lemma.

Lemma 3. *Nechť z je netriviální řešení rovnice*

$$z'' + q(t) z = 0$$

(i) je-li $q(t) \ge a^2$ pak sousední nulové body z jsou vzdáleny nejvýše π/a.
(ii) je-li $q(t) \le a^2$ pak sousední nulové body z jsou vzdáleny alespoň π/a.

Důkaz. Funkce $y_c(t) = \sin a(t-c)$ je (netriviální) řešení rovnice

$$y'' + a^2 y = 0\,, \tag{7}$$

vzdálenost sousedních kořenů je přesně π/a.

Ad (i): sporem — nechť sousední nulové body $t_0 < t_1$ funkce z jsou dále než π/a. Vhodnou volbou c dostaneme do intervalu (t_0, t_1) alespoň dva nulové body $\eta_0 < \eta_1$ funkce y_c. Podle srovnávací věty má z v $[\eta_0, \eta_1]$ kořen – spor.

Ad (ii): podobně — nechť $t_0 < t_1$ jsou sousední nulové body z, vzdálené méně než π/a. Dle srovnávací věty má každé řešení rovnice (7) v $[t_0, t_1]$ kořen. Avšak funkce y_c je při vhodném c nenulová dokonce na okolí $[t_0, t_1]$ – spor. □

Důkaz. (Věty 2) Substitucí $y(t) = t^{-1/2} z(t)$ přejdeme k rovnici

$$t^{3/2} z'' + \left(t^2 - s^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) t^{-1/2} z = 0$$

$$z'' + \underbrace{\left(1 + \frac{1/4 - s^2}{t^2}\right)}_{q(t)} z = 0 \tag{8}$$

Zřejmě $z(t)$ má stejné kořeny jako $y(t) = J_s(t)$, a pozorujeme, že $q(t) \to 1$ pro $t \to \infty$.

Nechť $\varepsilon \in (0, 1)$ je dáno. Zvolme $K > 0$ tak, že

$$(1 - \varepsilon)^2 < q(t) < (1 + \varepsilon)^2 , \qquad \forall t > K .$$

Podle Lemmatu je vzdálenost sousedních kořenů y v intervalu (K, ∞) větší než $1 - \varepsilon$ a menší než $1 + \varepsilon$. Speciálně je jich zde nekonečně mnoho. $\square$

Poznámka. Z rovnice (8) a Lemmatu 3 také ihned vidíme:

(i) $|s| \leq 1/2 \quad \Longrightarrow$ sousední kořeny J_s jsou vzdáleny nejvýše π

(ii) $|s| \geq 1/2 \quad \Longrightarrow$ sousední kořeny J_s jsou vzdáleny alespoň π