Úlohy

1. Nechť $y''+p(t)y'+q(t)y=0$. Určete funkci $u=u(t)$ tak, aby při substituci $y=u(t)z$ měla rovnice pro z tvar $z''+Q(t)z=0$. Vyjádřete $Q(t)$ pomocí $p(t)$, $q(t)$.

2. Nulové body každého netriviálního řešení rovnice $y''+py'+qy=0$ tvoří izolovanou množinu. Speciálně: má smysl hovořit o ,,sousedních" nulových bodech.

3. Nechť $y=y(t)$ je netriviální řešení rovnice $y''+q(t)y=0$, nechť $a>0$ je pevné číslo, I je interval.

(i) jestliže $q(t)\geq a$ pro $t\in I$, pak sousední nulové body y ležící v I jsou vzdáleny nejvýše $\pi/\sqrt{a}$.

(ii) jestliže $q(t)\leq a$ pro $t\in I$, pak sousední nulové body y ležící v I jsou vzdáleny alespoň $\pi/\sqrt{a}$.

4. Nechť y je netriviální řešení rovnice $y''+a(t)y=0$, nechť $a(t)\leq 0$ pro každé t v intervalu I. Potom y má v I nejvýše jeden nulový bod. – Dokažte (i) pomocí Šturmovy věty (ii) na základě elementárních úvah.

5. Uvažujte rovnici $y''+q(t)y=0$ v intervalu $(K,+\infty)$, kde $K>0$.

(i) jestliže $q(t)\leq \frac{1}{4t^2}$, pak netriviální řešení má nejvýše jeden nulový bod

(ii) jestliže $q(t)\geq \frac{1}{ct^2}$, kde $c<4$, pak každé řešení má nekonečně nulových bodů

6. Každé řešení rovnice $y''+\frac{1}{1+\sqrt{t}}y=0$ má v intervalu $(0,+\infty)$ nekonečně nulových bodů.

7. Každé netriviální řešení rovnice $y''+2y'/t+e^ty=0$ má v $(0,\infty)$ nekonečně nulových bodů. Rozdíl sousedních se blíží k 0 pro $t\to\infty$.

8. Každé netriviální řešení rovnice $ty''+2y'+(t+\sin t)y=0$ má v $(0,\infty)$ nekonečně nulových bodů. Rozdíl sousedních se blíží k 1 pro $t\to\infty$.

9. Uvažujte po řadě rovnice:

(i) $y''+t^2y=0$

(ii) $y''+e^{2t}y=0$

(iii)* $y''+y/t=0$

Nechť y je netriviální řešení, $t_0\in(0,\infty)$ je nulový bod. Ukažte, že existuje nulový bod $t_1>t_0$ a odvoďte co nejpřesnější (horní a dolní) odhad vzdálenosti $\Delta=t_1-t_0$.

10. Ukažte, že netriviální řešení rovnice $y''+(\sin t)y=0$ má v intervalu $[-\pi,\pi]$ nejvýše dva nulové body.

11. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' - ty' + y = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše pět nulových bodů.

12. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + t/2y' + y \operatorname{arctg} t = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše čtyři nulové body.

13. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + e^t y' + e^t y/2 = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše jeden nulový bod.

14. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + 2ty' + 4ty = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše čtyři nulové body.

15. Nechť $x(t)$ je libovolné netriviální řešení rovnice $t^2 x'' + (256 + t^4)^{1/2} x = 0$. Odhadněte počet počet nulových bodů funkce $x(t)$ v $(0, \delta)$ pro $\delta > 0$ malé. Dále dokažte, že $x(t)$ má nekonečně nul v každém okolí $+\infty$. Dokážete přesněji popsat jejich chování pro $t \to +\infty$?

16. Nechť $x(t)$ je libovolné netriviální řešení rovnice $x'' + Q(t)x = 0$, kde $Q(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} t - t^2$. Odvoďte horní odhad počtu nulových bodů $x(t)$ v $\mathbb{R}$.

17. Nechť $x(t)$ je řešení rovnice $x'' + Q(t)x = 0$, kde $Q(t) = 2t/(1 + t^2)$, s počáteční podmínkou $x(0) = 0$, $x'(0) > 0$. Předpokládejte, že existují další nulové body $t_2 > t_1 > 0$ a odhadněte *zdola* t_1 a $t_2 - t_1$. Ukažte srovnáním s vhodnou rovnicí, že $x(t)$ má v $(0, \infty)$ nekonečně nulových bodů (a tedy předpoklad výše je ospravedlněný).