Řešení

1) $u = \exp(-\int p/2)$, $Q = -p^2/4 - p'/2 + q$.

2) Je-li t_0 hromadný bod množiny $\{t \in I;\ y(t) = 0\}$, pak $y(t_0) = 0$ ze spojitosti. Navíc $y'(t_0) = 0$, neboť $y'(t_0) \neq 0$ implikuje, že $y \neq 0$ na jistém $P(t_0)$. Pro rovnici 2. řádu podmínka $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ určuje triviální řešení, spor.

3) Srovnejte s $z'' + a^2 z = 0$, kde řešení mají tvar $z_c(t) = \sin[a(t-c)]$.

4) Nechť $t_0 < t_1$ jsou sousední nulové body y. (i) Každé řešení rovnice $z'' + 0z = 0$ by mělo v $[t_0, t_1]$ nulový bod – spor. (ii) BÚNO navíc $y > 0$ na (t_0, t_1), ovšem pak y je konvexní v $[t_0, t_1]$, což není možné.

5) Srovnejte s Eulerovou rovnicí $t^2 z'' + dz = 0$, jejíž řešení má nekonečně nulových bodů pokud $d > 1/4$, a nemá obecně žádné nulové body, jestliže $d \leq 1/4$

6) Užijte předchozí bod (ii) předchozího cvičení na intervalu $(K, +\infty)$ pro vhodné velké $K > 0$

7) Substituce $y(t) = z(t)/t$ (viz cvičení 1) vede na rovnici $z'' + e^t z = 0$. Srovnejte s $w'' + a^2 w = 0$ pro velké a^2 a užijte cvičení 3.

8) Pomocí cvičení 1 převeďte na rovnici $z'' + Q(t)z = 0$, kde $Q(t) = 1 + \sin t/t$. Užijte cvičení 3.

9) Aplikujeme výsledky cvičení 3. (i) $q(t) = t^2 \geq t_0^2$ na $[t_0, \infty)$, odtud $\Delta \leq \pi/t_0$. Naproti tomu $q(t) \leq (t_1)^2 \leq (t_0 + \pi/t_0)^2$ na $[t_0, t_1]$, tedy $\Delta \geq \pi/(t_0 + \pi/t_0)$. (ii) $q(t) = e^{2t} \geq e^{2t_0}$ na $[t_0, \infty)$, odtud $\Delta \leq \pi e^{-t_0}$. Naproti tomu $q(t) \leq e^{2t_1} \leq e^{2(t_0 + \pi e^{-t_0})}$ na $[t_0, t_1]$, tedy $\Delta \geq \pi e^{-(t_0 + \pi e^{-t_0})}$. (iii) $q(t) \leq 1/t_0$ na $[t_0, \infty)$, tedy $\Delta \geq \pi\sqrt{t_0}$. Ansatz: hledejme t_1 v intervalu $I := [t_0, t_0 + \pi\sqrt{t_0} + \delta]$, kde $\delta > 0$ je pevné. Protože $q(t) \geq 1/(t_0 + \pi\sqrt{t_0} + \delta)$ v I, je $t_1 - t_0 \leq \pi\sqrt{t_0 + \pi\sqrt{t_0} + \delta}$, což je (ospravedlnění Ansatzu!) menší než $\pi\sqrt{t_0} + \delta$ pro δ ne příliš malé.

10) Protože $q(t) = \sin t \leq 1$, je vzdálenost sousedních bodů alespoň π, viz cvičení 3. Tedy tři nulové body mohou být pouze $-\pi$, 0 a π. Leč $q(t) \leq 0$ v $[-\pi, 0]$, pročež tento interval obsahuje nejvýše jeden nulový bod (cvičení 4) – spor.

11) Pomocí cvičení 1 převeďte na $z'' + q(t)z = 0$, kde $q(t) = 3/2 - t^2/4$. Na intervalech $(-\infty, -\sqrt{6}]$, $[\sqrt{6}, +\infty)$ je $q(t) \leq 0$, tedy obsahují nejvýše po jednom nulovém bodu (viz cvičení 4). Na $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ je $q(t) \leq 3/2$; odtud (a díky cvičení 3ii) se sem vejdou nejvýše dva.

12) Pomocí cvičení 1 převeďte na $z'' + q(t)z = 0$, kde $q(t) = \operatorname{arctg} t - 1/4 - t^2/16$. Protože $\operatorname{arctg} t \leq \pi/2$, a dokonce ≤ 0 pro $t \leq 0$, je $q(t) \leq 0$ mimo $[0, M]$ a $q(t) \leq \pi/2$ na $[0, M]$, kde $M = 4\sqrt{\pi/2 - 1/4}$. Dále jako v předchozím cvičení.

13) Užijte cvičení 1 (vyjde $Q = -e^{2t}/2$) a cvičení 4.

14) Pomocí cvičení 1 převeďte na $z'' + q(t)z = 0$, kde $q(t) = -t^2 + 4t - 1$. Tedy $q(t) \leq 3$ na $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$, kam se tudíž vejdou nejvýše dvě nuly díky cvičení 3, zatímco $q \leq 0$ mimo tento interval a užijeme cvičení 4.

15) V okolí nuly srovnáme s Eulerovou rovnicí $t^2y'' + 16y = 0$, která má řešení tvaru $t^{1/2}\sin(c\ln t)$, kde $c = 3\sqrt{7}/2$; tato funkce má zřejmě nekonečně nulových bodů v každém okolí $(0, \delta)$ a totéž plyne pro $x(t)$. Pro $t \to +\infty$ užijeme úlohu 3, kde $q(t) \to 1$, tedy vzdálenost sousedních bodů se blíží jedné.

16) Protože $\operatorname{arctg} t \leq \frac{\pi}{2}$ všude a ≤ 0 pro $t \leq 0$, je $Q(t) \leq 0$ na $(-\infty, 0]$ a na $[1, \infty)$. Zde je nejvýše po jednom nulovém bodu, viz úloha 4. Na intervalu $[0, 1]$ je $Q(t) \leq 1$; sousední nulové body jsou tedy vzdáleny aspoň π, a tedy se sem vejde nejvýše jeden.

17) Protože $Q(t) \leq 1$, je $t_1 \geq \pi$ dle úlohy 3. Odsud $Q(t) \leq Q(\pi)$ na $[t_1, \infty)$, tedy $t_2 - t_1 \geq \pi/\sqrt{Q(\pi)} = \sqrt{\pi(1+\pi^2)/2}$. Dále užijte výsledek úlohy 5ii).