Soustavy lineárních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat *soustavami lineárních diferenciálních rovnic*

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{aligned} \tag{1}$$

kde $a_{ij},\ f_i : I \to \mathbb{R},\ i,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou spojité funkce na I. Většinou budeme používat maticový zápis

$$Y' = A(x)Y + F(x), \tag{2}$$

kde

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

a $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ je vektor neznámých. Pokud jsou funkce a_{ij} nezávislé na x, jedná se o *soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty*:

$$Y' = AY + F(x). \tag{4}$$

Pokud $F(x) = 0$, $x \in I$, jedná se o *homogenní soustavu*:

$$Y' = A(x)Y. \tag{5}$$

Doplníme-li soustavu rovnic *počáteční podmínkou*

$$Y(a) = B, \tag{6}$$

kde $a \in I$ a $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, hovoříme o *počáteční úloze.*
Než si ukážeme, jak soustavy rovnic řešit, uvedeme několik vět, které nám řeknou, v jakém tvaru máme řešení očekávat.

Věta 1 (Existence a jednoznačnost)**.** *Pro každé $a \in I$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno maximální řešení počáteční úlohy* (2), (6) *. Toto řešení je definované na celém intervalu I.*

Věta 2 (Prostor řešení)**.** 1. *Množina všech maximálních řešení homogenní rovnice* (5) *tvoří vektorový prostor dimenze n.*

2. *Je-li Y_p maximální řešení nehomogenní rovnice* (2), *potom množina všech maximálních řešení rovnice* (2) *je*

$$\{Y_p + Y : Y \text{ je maximální řešení } (5)\}.$$

Bázi prostoru všech maximálních řešení z předchozí věty nazýváme *fundamentálním systémem* rovnice (5). Matici, jejíž sloupce tvoří prvky fundamentálního systému, nazveme *fundamentální maticí.* Obecné řešení soustavy (5) je pak $Y(x) = \Phi(x)c$, $c \in \mathbb{R}^n$.

V této kapitole se budeme zabývat především tím, jak nalézt fundamentální systém homogenní soustavy, a to pouze pro soustavy s konstantními koeficienty. Nalezení fundamentálního systému pro soustavy s nekonstantními koeficienty je obtížné až nemožné. Něco málo o takových problémech najdete v kapitole o variaci konstant, kde se rovněž zabýváme hledáním *partikulárního řešení Y_p* z Věty 2. V této kapitole budeme řešit pouze problémy s pravou stranou ve speciálním tvaru, pro něž lze partikulární řešení nalézt snadněji.

V této části se budeme zabývat soustavami rovnic s konstantními koeficienty, tj. především homogenní soustavou

$$Y' = AY, \tag{7}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ukážeme si několik postupů, jak lze homogenní (ale i nehomogenní) soustavy s konstantními koeficienty řešit. Začneme nejelementárnějším postupem a budeme postupovat k více sofistikovaným způsobům řešení.