**Řešení**

**24)** Nula je dvojnásobné vlastní číslo. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 0 je $v_1 = (c, 2c)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ a přidružený vektor $v_2 = (a, b)$ musí splňovat $-2a + b = c$, tedy např. pro $c = 1$, $b = 0$ máme řetězec vlastních vektorů $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-\frac{1}{2}, 0)$ příslušných vlastnímu číslu 0. Fundamentální systém tedy je

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\right].$$

**25)** Vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 10$, příslušné vlastní vektory jsou $v_1 = (-2, 1, 0)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (1, 2, -2)$. Tedy fundamentální systém je

$$e^t \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, e^{10t} \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

**26)** Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3i$, $\lambda_3 = -3i$, číslu $\lambda_1$ přísluší vlastní vektor $v_1 = (-1, 1, 1)$, číslu $\lambda_2$ přísluší vektor $v_2 = (-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i, 1)$ a číslu $\lambda_2$ přísluší vektor $v_3 = (-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i, \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i, 1)$ . Tedy reálný fundamentální systém je

$$e^{-t} \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \cos 3t \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}\\0\end{pmatrix}, \cos 3t \begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}\\0\end{pmatrix} + \sin 3t \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix}.$$

**27)** Vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 3$, číslu $\lambda_1$ přísluší řetězec vlastních vektorů $v_1 = (-1, 1, 2)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ a číslu $\lambda_3$ přísluší vektor $v_3 = (1, 0, -1)$. Tedy fundamentální systém je

$$e^{3t} \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, e^{2t} \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right].$$

**28)** Vlastní číslo 0 má vlastní vektory $(-2, 1, 0)$ a $(-3, 0, 1)$, vlastní číslo 14 má vlastní vektor $(1, 2, 3)$. Fundamentální systém je tedy

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}, e^{14t} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

**29)** Fundamentální systém je

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ e^{-t}\cos t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-e^{-t}\sin t\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\ e^{-t}\cos t\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+e^{-t}\sin t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

**30)** Fundamentální systém je

$$e^{-3t}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\ e^{-3t}\cos t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-e^{-t}\sin t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ e^{-t}\cos t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+e^{-t}\sin t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

**31)** Fundamentální systém je

$$e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ e^{2t}\begin{pmatrix}t+4\\1\\-t-2\end{pmatrix},\ e^{2t}\begin{pmatrix}t^2/2+4t+1\\t\\-t^2/2-2t\end{pmatrix}.$$