Řešení soustav pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů

Třetí způsob, jak lze řešit homogenní rovnice, je založen na maticové exponenciále, o které bude blíže pojednáno v jiné kapitole. Zde jen uveďme následující věty, ze kterých plyne, jak postupovat při řešení soustav rovnic.

Věta 3. *Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů $q_1, q_2, \ldots, q_n$ příslušných po řadě vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Potom funkce*

$$e^{\lambda_1 t}q_1,\ e^{\lambda_2 t}q_2,\ \ldots,\ e^{\lambda_n t}q_n \tag{12}$$

tvoří fundamentální systém soustavy (7).

Poznámka. Předcházející věta nepožaduje, aby $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ byla navzájem různá. Pokud má matice A n různých vlastních čísel, pak má jistě n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Pokud se některé vlastní číslo opakuje, tedy má větší násobnost než jedna, pak může, ale nemusí existovat n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Pokud neexistuje n lineárně nezávislých vlastních vektorů, je situace složitější. Tímto případem se budeme zabývat níže.

Příklad 4. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= -8x + 21y\,, \\ y' &= -3x + 8y\,. \end{aligned}$$

Řešení. Vypočítejme vlastní čísla matice:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 8)(\lambda - 8) + 3 \cdot 21 = \lambda^2 - 1.$$

Vlastní čísla matice jsou tedy $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Vlastní vektor v příslušný k vlastnímu číslu 1 splňuje

$$(I - A)v = 0\,, \quad \text{tj.} \quad 9v_1 - 21v_2 = 0.$$

Máme tedy například $v = (7, 3)$. Podobně vlastní vektor w příslušný k vlastnímu číslu -1 splňuje

$$(-I - A)w = 0\,, \quad \text{tj.} \quad 7w_1 - 21w_2 = 0.$$

Máme tedy například $w = (3, 1)$. Fundamentální systém soustavy je tedy

$$e^t \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix},\ e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A nyní k případu, kdy neexistuje n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Řekneme, že $v_1, \ldots, v_k$ je *řetězec přidružených vlastních vektorů* příslušný vlastnímu číslu λ, pokud

$$(\lambda - A)v_1 = 0, \ (\lambda - A)v_2 = v_1, \ \ldots, \ (\lambda - A)v_k = v_{k-1}.$$

Věta 4. *Nechť $v_1, \ldots, v_k$ je řetězec přidružených vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu λ. Pak funkce*

$$e^{\lambda t}v_1, \ e^{\lambda t}(v_1 t + v_2), \ e^{\lambda t}\left(v_1 \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right),$$
$$\ldots, \ e^{\lambda t}\left(v_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + v_{k-1}t + v_k\right)$$

jsou lineárně nezávislá řešení soustavy (7).

Situace vypadá tak, že každé Jordanově buňce odpovídá jeden vlastní vektor a pokud je velikost Jordanovy buňky větší než jedna, pak i řetězec přidružených vlastních vektorů, který je stejně dlouhý jako velikost buňky. Podle předchozí věty tedy každé Jordanově buňce o velikosti k odpovídá k-lineárně nezávislých řešení. Najdeme-li takováto řešení pro všechny Jordanovy buňky, budou tato řešení dohromady tvořit fundamentální systém soustavy. Pokud však má matice kořeny, které nejsou reálné, ani tento fundamentální systém nebude reálný. Abychom získali reálný fundamentální systém, musíme pro $(\lambda = a+bi, v = v_1+iv_2)$ a $(\bar{\lambda} = a-bi, \bar{v} = v_1-iv_2)$ nahradit řešení

$$e^{\lambda t}v, \, e^{\bar{\lambda} t}\bar{v} \quad \text{řešeními} \quad e^{at}(\cos(bt)v_1 - \sin(bt)v_2), \, e^{at}(\cos(bt)v_2 + \sin(bt)v_1).$$

Příklad 5. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= x + 4z \\ y' &= x + y + z \\ z' &= -4x + z. \end{aligned}$$

Řešení. Spočítáme vlastní čísla matice:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 + 16(1-\lambda) = (1-\lambda)(17 - 2\lambda + \lambda^2).$$

Tedy $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 17}) = 1 \pm 4i$. Spočítáme vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. $u = (0, 1, 0)$. K vlastnímu číslu $1 + 4i$:

$$\begin{pmatrix} -4i & 0 & 4 \\ 1 & -4i & 1 \\ -4 & 0 & -4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4i & 0 & 4 \\ 1 & -4i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. $v = (4, 1 - i, 4i)$. K vlastnímu číslu $1 - 4i$ máme vlastní vektor komplexně sdružený, tedy $w = \bar{v} = (4, 1 + i, -4i)$. Komplexní fundamentální systém tedy je

$$e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e^t(\cos(4t) + i\sin(4t)) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - i \\ 4i \end{pmatrix}, \; e^t(\cos(4t) - i\sin(4t)) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 + i \\ -4i \end{pmatrix}.$$

Reálný fundamentální systém je potom

$$e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e^t \cos(4t) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^t \sin(4t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; e^t \cos(4t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + e^t \sin(4t) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= 10x - 13y + 6z - 19w\,, \\ y' &= -3x + 7y - 2z + 7w\,, \\ z' &= 5x - 8y + 6z - 12w\,, \\ w' &= 7x - 11y + 6z - 15w \end{aligned}$$

Řešení. Spočtěme nejdříve vlastní čísla matice:

$$\det \begin{pmatrix} 10 - \lambda & -13 & 6 & -19 \\ -3 & 7 - \lambda & -2 & 7 \\ 5 & -8 & 6 - \lambda & -12 \\ 7 & -11 & 6 & -15 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 8 - 3\lambda & 0 & 2 \\ -3 & 7 - \lambda & -2 & 7 \\ -8 + 3\lambda & 26 - 13\lambda + \lambda^2 & 0 & 18 - 7\lambda \\ -2 & 10 - 3\lambda & 0 & 6 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 8 - 3\lambda & 2 \\ -8 + 3\lambda & 26 - 13\lambda + \lambda^2 & 18 - 7\lambda \\ -2 & 10 - 3\lambda & 6 - \lambda \end{pmatrix},$$

což po výpočtech dává

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16,$$

tedy $\lambda = 2$ je čtyřnásobné vlastní číslo.
Hledejme nyní vlastní vektory.

$$\begin{pmatrix} 8 & -13 & 6 & -19 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 5 & -8 & 4 & -12 \\ 7 & -11 & 6 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Získáváme tedy pouze dva lineárně nezávislé vlastní vektory, např. $u = (2, 0, 1/2, 1)$ a $v = (2, 1, -1/2, 0)$. To znamená, že matice má buď dvě Jordanovy buňky velikosti 2, nebo jednu velikosti 1 a jednu velikosti 3. Zkusíme tedy hledat přidružené vlastní vektory, nevíme ale, ke kterému vektoru je máme hledat, řešíme tedy rovnici

$$\begin{pmatrix} 8 & -13 & 6 & -19 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 5 & -8 & 4 & -12 \\ 7 & -11 & 6 & -17 \end{pmatrix} v_2 = au + bv,$$

tj.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -13 & 6 & -19 & 2a+2b \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b \\ 5 & -8 & 4 & -12 & \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ 7 & -11 & 6 & -17 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 & 2a+5b \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b \\ -1 & 2 & 0 & 2 & \frac{a}{2} + \frac{3b}{2} \\ -2 & 4 & 0 & 4 & a+3b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 & 2a+5b \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}a - \frac{7}{2}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3a-7b \end{array}\right).$$

Odtud máme $3a = -7b$, můžeme volit $a = 7$, $b = -3$, tedy vektor v_1 (počátek řetězce) je $(8, -3, 5, 7)$. Protože počátek řetězce je jen jeden (až na násobek), je jen jedna Jordanova buňka větší než jedna. Máme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & -3 \end{array}\right),$$

což dává řešení $v_2 = (3, 1, -1/2, 0) + a_2(2, 0, 1/2, 1) + b_2(2, 1, -1/2, 0)$. Hledejme vektor v_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -13 & 6 & -19 & 2a_2+2b_2+3 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b_2+1 \\ 5 & -8 & 4 & -12 & \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2} \\ 7 & -11 & 6 & -17 & a_2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 & 2a_2+5b_2+6 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b_2+1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & \frac{1}{2}a_2+\frac{3}{2}b_2+\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & 0 & 4 & a_2+3b_2+3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 & 2a_2+5b_2+6 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b_2+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}a_2-\frac{7}{2}b_2-\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3a_2-7b_2-9 \end{array}\right).$$

Řešením soustavy je například $b_2 = 0$, $a_2 = -3$ (tedy $v_2 = (-3, 1, -2, -3)$) a v_3 splňující

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right),$$

tj. např. $v_3 = (0, 0, -1/2, 0)$. Fundamentální systém soustavy je tedy:

$$e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ e^{2t}\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},\ e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right),$$

$$e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$