Řešení

14) Postupnými úpravami dostáváme $z''+z'-2z=-4e^{-t}$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 1 a -2, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $2e^{-t}$, tedy $z(t)=2e^{-t}+ae^{-2t}+be^{t}$. Funkci y dopočítáme z rovnice $z'+8z-3y=5e^{-t}$. Vyjde $y(t)=3e^{-t}+2ae^{-2t}+3be^{t}$, $t\in\mathbb{R}$, a, $b\in\mathbb{R}$.

15) Postupnými úpravami dostáváme $-z'''=1-e^{t}$. Nula je trojnásobný kořen charakteristického polynomu, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $e^{t}-\frac{1}{6}t^3$, tedy $z(t)=e^{t}-\frac{1}{6}t^3+a+bt+ct^2$ (stejný výsledek dostaneme i přímou integrací v upravené rovnici). Funkci y následně dopočítáme z rovnice $z''+y'+z=e^{t}$. Vyjde $y'(t)=(-2-b)e^{t}+\frac{1}{6}t^3-t^2-(a+c)$ a přímou integrací dostaneme $y(t)=d-t(a+c)-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{24}t^4-(2+b)e^{t}$, $t\in\mathbb{R}$, a, b, c, $d\in\mathbb{R}$.

16) Postupnými úpravami dostáváme $-x''+5x'-6x=0$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 2 a 3, tedy $x(t)=ae^{3t}+be^{2t}$. Funkce y a z dopočítáme z rovnic $x'-6x+y'-4y=0$ a $x'-5x-y+z=0$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $y'-4y=3ae^{3t}+4be^{2t}$, tj. $\lambda_1=4$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $-3ae^{3t}-2be^{2t}$ a tedy $y(t)=-3ae^{3t}-2be^{2t}+ce^{4t}$. A z druhé je (pouhým dosazením) $z(t)=-ae^{3t}+be^{2t}+ce^{4t}$, $t\in\mathbb{R}$, a, b, $c\in\mathbb{R}$.

17) Postupnými úpravami dostáváme $y'''+6y'+20y=0$. Kořeny charakteristického polynomu jsou -2 a $1\pm 3i$, tedy $y(t)=ae^{-2t}+be^{t}\cos 3t+ce^{t}\sin 3t$. Funkce x a z dopočítáme z rovnic $y'+8y-6z=0$ a $-3x+12y+z'-7z=0$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Vyjde $z(t)=ae^{-2t}+(\frac{c}{2}+\frac{3b}{2})e^{t}\cos 3t+(\frac{3c}{2}-\frac{b}{2})e^{t}\sin 3t$, $x(t)=ae^{-2t}+\frac{c+b}{2}e^{t}\cos 3t+\frac{c-b}{2}e^{t}\sin 3t$, $t\in\mathbb{R}$, a, b, $c\in\mathbb{R}$.

18) Postupnými úpravami dostáváme $x'''-x''-5x'-3x=0$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 3 a dvakrát -1, tedy $x(t)=ae^{3t}+be^{-t}+cte^{-t}$. Funkce y a z dopočítáme z rovnic $-x''-2x'+47x-48y=0$ a $x'-7x+10y+4z=0$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Vyjde $y(t)=\frac{2}{3}ae^{3t}+be^{-t}+cte^{-t}$, $z(t)=-\frac{2}{3}ae^{3t}+(-\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}ct)e^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$, a, b, $c\in\mathbb{R}$.

19) Postupnými úpravami dostáváme $y''-4y'+4y=0$. Dvojnásobný kořen charakteristického polynomu je 2, tedy $y(t)=ae^{2t}+bte^{2t}$. Funkce x a z dopočítáme z rovnic $x'-2x+7y-4y'=0$ a $-x+y'-z=0$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $x'-2x=ae^{2t}+4be^{2t}+bte^{2t}$, tj. $\lambda_1=2$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $(a+4b)te^{2t}+\frac{b}{2}t^2e^{2t}$ a tedy $x(t)=ce^{2t}+(a+4b)te^{2t}+\frac{b}{2}t^2e^{2t}$. A z druhé je (pouhým dosazením) $z(t)=(2a+b-c)e^{2t}-(a+2b)te^{2t}-\frac{b}{2}t^2e^{2t}$, $t\in\mathbb{R}$, a, b, $c\in\mathbb{R}$.

20) Postupnými úpravami dostáváme $x''-2x'+x=-2\cos t$. Dvojnásobný kořen charakteristického polynomu je 1, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $\sin t$, tedy $x(t) = ae^t + bte^t + \sin t$. Funkce y a z dopočítáme z rovnic $x - 3x' + y' + y = \sin t - 3\cos t$ a $x' - 2x + y - z = \cos t$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $y' + y = (2a + 3b)e^t + 2bte^t$, tj. $\lambda_1 = -1$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $(2a + b + 2bt)e^t$ a tedy $y(t) = ce^{-t} + (2a + b + 2bt)e^t$. A z druhé je (pouhým dosazením) $z(t) = ce^{-t} + (a + 2b + bt)e^t - 2\sin t$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

21) Postupnými úpravami dostáváme $-x'' + 2x' = 3e^t$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 0 a 2, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $3e^t$, tedy $x(t) = a + be^{2t} + 3e^t$. Funkce y a z dopočítáme z rovnic $x' + y' + y = 0$ a $x' - x + 2y + z = -2e^t$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $y' + y = -2be^{2t} - 3e^t$, tj. $\lambda_1 = -1$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $-\frac{3}{2}e^t - \frac{2}{3}be^{2t}$ a tedy $y(t) = ce^{-t} - \frac{3}{2}e^t - \frac{2}{3}be^{2t}$. A z druhé je (pouhým dosazením) $z(t) = a - 2ce^{-t} + e^t + \frac{1}{3}be^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

22) Postupnými úpravami dostáváme $y'' - 2y' + y = 6t^2 - 11t + 4$. Dvojnásobný kořen charakteristického polynomu je 1, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $6t^2 + t - 6$, tedy $y(t) = ae^t + bte^t + 6t^2 + t - 6$. Funkce x a z dopočítáme z rovnic $y + z' - 2z = 3t - 2$ a $-x + y' + 2z = -3t^2$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $z' - 2z = -ae^t - bte^t - 6t^2 + 2t + 4$, tj. $\lambda_1 = 2$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $bte^t + (a + b)e^t + 3t^2 + 4t$ a tedy $z(t) = ce^{2t} + bte^t + (a + b)e^t + 3t^2 + 4t$. A z druhé je (pouhým dosazením) $x(t) = 3bte^t + (3a + 3b)e^t + 2ce^{2t} + 3t^2 + 20t + 1$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

23) Postupnými úpravami dostáváme $z''' - 3z'' = -4e^{-t}$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 3 a dvakrát 0, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je e^{-t}, tedy $z(t) = a + bt + ce^{3t} + e^{-t}$. Funkce x a y dopočítáme z rovnic $-x + z' + z = 0$ a $x' - 2x - y = e^{2t}$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Vyjde $x(t) = a + b + bt + 4ce^{3t}$, $y(t) = -2a - b - 2bt + 4ce^{3t} - e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$. Řešení splňující počáteční podmínku má tvar $x(t) = 0$, $y(t) = -e^{2t}$, $z(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.