

Řešení soustav pomocí úprav λ -matice

Tento způsob řešení se od předchozího liší pouze formou zápisu. Díky přehlednějšímu formalismu však umožňuje řešit i větší soustavy. Buď λ operátor derivování, tj. $\lambda z := z'$, $\lambda^2 z = z''$, \dots . S využitím tohoto označení můžeme namísto operací s rovnicemi provádět operace s řádky matice, ve které se vyskytují polynomy v proměnné λ . Konkrétně se jedná o úpravy:

- záměna pořadí řádků matice,
- vynásobení řádku matice číslem,
- přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde P je polynom.

Matici snadno upravíme na trojúhelníkový tvar pomocí Gaussovy eliminace. Navíc můžeme takto upravovat rozšířenou matici o sloupec pravých stran a řešit tak rovnou nehomogenní rovnici.

Pozor, není možné vynásobit řádek polynomem v λ , tím by se zvýšil řád soustavy. Také není možné polynomy dělit.

Příklad 2. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned}x' &= 2x + y - z, \\y' &= 7x + 4y - z, \\z' &= 13x + 7y - 3z.\end{aligned}$$

Řešení. S využitím zápisu pomocí λ dostáváme

$$\begin{aligned}\lambda x - 2x - y + z &= 0, \\-7x + \lambda y - 4y + z &= 0, \\-13x - 7y + \lambda z + 3z &= 0.\end{aligned}$$

Upravujme tedy matici

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -7 & \lambda - 4 & 1 \\ -13 & -7 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Od druhého řádku odečteme první řádek a od třetího řádku odečteme $(\lambda + 3)$ násobek prvního řádku:

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -(\lambda - 2)(\lambda + 3) - 13 & (\lambda + 3) - 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Od druhého řádku odečteme třetí řádek a poté od třetího řádku odečteme $(\lambda - 4)$ -násobek druhého řádku

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ \lambda^2 + 2 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ \lambda^2 + 2 & 1 & 0 \\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V posledním řádku máme nyní rovnici $-x''' + 3x'' - 3x' + x = 0$, v matici je tedy rovnou charakteristický polynom této rovnice. Dostáváme tedy řešení

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t, \quad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Z druhého řádku matice dopočítáme y :

$$y(t) = -x'' - 2x = -e^t(3c_1 + 2c_2 + 2c_3 + t(3c_2 + 4c_3) + t^2 \cdot 3c_3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z první rovnice dopočítáme z :

$$z(t) = e^t(-2c_1 - 3c_2 - 2c_3 + t(-2c_2 - 6c_3) + t^2 \cdot (-2c_3)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2y'' + 3z'' - 7y - 6z &= t + 1 \\ 4y'' + 3z'' - 4y - 3z &= 2t. \end{aligned}$$

Řešení. Napíšeme si λ -matici s pravou stranou:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 & 3\lambda^2 - 6 & t + 1 \\ 4\lambda^2 - 4 & 3\lambda^2 - 3 & 2t \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 & 3\lambda^2 - 6 & t + 1 \\ 2\lambda^2 + 3 & 3 & t - 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 - (\lambda^2 - 2)(2\lambda^2 + 3) & 0 & t + 1 - (t - 1)'' + 2(t - 1) \\ 2\lambda^2 + 3 & 3 & t - 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} -2\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 & 0 & 3t - 1 \\ 2\lambda^2 + 3 & 3 & t - 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Řešení charakteristického polynomu v prvním řádku jsou $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}/2$. Tedy řešení homogenní rovnice

$$-2y^{(4)} + 3y'' - y = 0$$

jsou

$$ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude ve tvaru $y_p(t) = rt + s$, což po dosazení do rovnice dává $y_p(t) = -3t + 1$. Tedy

$$y(t) = ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t} - 3t + 1.$$

Z druhé rovnice pak máme

$$\begin{aligned} 3z(t) &= t - 1 - 2y'' - 3y = t - 1 - 2\left(ae^t + be^{-t} + \frac{1}{2}ce^{\sqrt{2}/2t} + \frac{1}{2}de^{-\sqrt{2}/2t}\right) \\ &\quad - 3\left(ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t} - 3t + 1\right) \\ &= 10t - 4 - 5ae^t - 5be^{-t} - 4ce^{\sqrt{2}/2t} - 4de^{-\sqrt{2}/2t}. \end{aligned}$$