Řešení

1) Z druhé rovnice $y(t) = ce^{2t}$, z první rovnice pak $x' - 2x = ce^{2t}$. Řešením rovnice s pravou stranou ve speciálním tvaru je $x(t) = de^{2t} + x_p(t)$, kde $x_p(t) = cte^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, c, $d \in \mathbb{R}$.

2) Po úpravách $x'' - 6x' + 5x = 0$, tj. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $x(t) = ce^t + de^{5t}$, z první rovnice pak $y(t) = -ce^t + 3de^{5t}$, $t \in \mathbb{R}$, c, $d \in \mathbb{R}$.

3) Po úpravách dostaneme $-x'' + 4x' - 3x = 0$, tj. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $x(t) = ce^t + de^{3t}$ a následně z první rovnice je $y(t) = -ce^t - \frac{4}{3}de^{3t}$, $t \in \mathbb{R}$, c, $d \in \mathbb{R}$.

4) Po úpravách dostaneme $-x'' + 2x' - 5x = 0$, tj. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, $x(t) = ae^t \cos 2t + be^t \sin 2t$ a následně $y(t) = (-\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b)e^t \cos 2t + (\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b)e^t \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

5) Po úpravách máme $x'' + 2x' + x = 0$, tj. $\lambda_{1,2} = -1$, $x(t) = ae^{-t} + bte^{-t}$ a následně $y(t) = (-\frac{3}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{3}{2}bt)e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

6) Po úpravách vyjde $x'' + 8x' + 16x = 9e^{2t}$, tj. $\lambda_{1,2} = -4$, partikulární řešení vyjde (pomocí metody speciální pravé strany) $\frac{1}{4}e^{2t}$, tedy $x(t) = ae^{-4t} + bte^{-4t} + \frac{1}{4}e^{2t}$ a následně $y(t) = (-a - b - bt)e^{-4t} - \frac{7}{4}e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

7) Po úpravách $y'' - 4y = t$, tj. $\lambda_{1,2} = \pm 2$, partikulární řešení vyjde $-t/4$, tj. $y(t) = ae^{2t} + be^{-2t} - t/4$. Z druhé rovnice pak $x(t) = 3ae^{2t} - be^{-2t} - 1/4(t+1)$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

8) Po úpravách vyjde $-x'' + 2x' = 8e^{2t} + 8t$, tj. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, partikulární řešení vyjde (pomocí metody speciální pravé strany) $-4te^{2t} + 2t^2 + 2t$, tedy $x(t) = a + be^{2t} - 4te^{2t} + 2t^2 + 2t$ a následně $y(t) = 6te^{2t} + e^{2t}(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}b) - 2t^2 - 3t - \frac{1}{2} - a$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

9) Po úpravách vyjde $x'' - x' - 2x = 3e^t + te^t$, tj. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$, partikulární řešení vyjde (pomocí metody speciální pravé strany) $-\frac{7}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t$, tedy obecné řešení je $x(t) = ae^{2t} + be^{-t} - \frac{7}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t$ a následně $y(t) = -ae^{2t} - 4be^{-t} + 2e^t + te^t$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$. Řešení splňující počáteční podmínky má tvar $x(t) = \frac{5}{3}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-t} - \frac{7}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t$, $y(t) = -\frac{5}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} + 2e^t + te^t$, $t \in \mathbb{R}$.

10)

$$\begin{bmatrix} 1 - 2\,t & t \\ -4\,t & 1 + 2\,t \end{bmatrix} \tag{10}$$

11)

$$\begin{bmatrix} e^t - 6\,te^t & 4\,te^t \\ -9\,te^t & e^t + 6\,te^t \end{bmatrix} \tag{11}$$

12) Postupnými úpravami dostáváme $x''' - 2x'' - 3x' + 6x = 0$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 2, $\pm\sqrt{3}$, tedy $x = ae^{2t} + be^{\sqrt{3}t} + ce^{-\sqrt{3}t}$. Funkce y a z dopočítáme například z rovnic $z = -x'' + x' + 3x$, $y = x' - x - z$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Vyjde $z(t) = ae^{2t} + \sqrt{3}be^{\sqrt{3}t} - \sqrt{3}ce^{-\sqrt{3}t}$ a $y(t) = -be^{\sqrt{3}t} - ce^{-\sqrt{3}t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

13)

$$\begin{bmatrix} 1/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} + e^{3\,t} & 1/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & 2\,e^{4\,t} - e^{3\,t} - e^{2\,t} \\ -e^{3\,t} + 3/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & 3/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & 2\,e^{4\,t} + e^{3\,t} - 3\,e^{2\,t} \\ 1/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & 1/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & -e^{2\,t} + 2\,e^{4\,t} \end{bmatrix}$$