Řešení soustav pomocí upravování soustavy

Upravujeme soustavu rovnic takovým způsobem, abychom získali jednu rovnici (typicky vyššího řádu) s jednou neznámou. Tímto způsobem (jak uvidíme na příkladech) je možné řešit i nehomogenní rovnice, pokud je funkce F dostatečně hladká. Tento způsob je vhodný pro soustavy 2 rovnic, případně je-li matice soustavy dostatečně řídká (obsahuje hodně nul). Pro větší soustavy (husté matice) je tento způsob poněkud nepřehledný.

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} y' &= 3y - 5z - 3e^x \\ z' &= y - z - e^x \end{aligned} \tag{8}$$

Řešení. Zderivujme druhou rovnici (potřebujeme tedy, aby "pravá strana", tj. $-3e^x$, $-e^x$ rovnice měla derivaci)

$$z'' = y' - z' - e^x \,.$$

Od první rovnice odečteme trojnásobek druhé rovnice

$$y' - 3z' = -2z \,.$$

Sečteme-li dvě nově získané rovnice a odečteme od obou stran y', máme

$$z'' - 3z' = -z' - 2z - e^x \,, \quad \text{nebo-li} \quad z'' - 2z' + 2z = -e^x \,. \tag{9}$$

Řešení homogenní rovnice $z'' - 2z' + 2z = 0$ jsou funkce

$$z(x) = ce^x \cos x + de^x \sin x \,, \quad x \in \mathbb{R}\,, c, d \in \mathbb{R}.$$

Protože pravá strana $-e^x$ je ve speciálním tvaru, bude existovat partikulární řešení ve tvaru $z_p(x) = ce^x$. Dosazením do rovnice dostáváme $c = -1$, řešení rovnice (9) tedy jsou

$$z(x) = ce^x \cos x + de^x \sin x - e^x \,, \quad x \in \mathbb{R}\,, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

Z druhé rovnice původní soustavy dopočítáme

$$y(x) = z'(x) + z(x) + e^x = (2c + d)e^x \cos x + (2d - c)e^x \sin x - e^x \,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$