Soustavy lineárních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat *soustavami lineárních diferenciálních rovnic*

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\
y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x)
\end{aligned} \tag{1}
$$

kde $a_{ij},\ f_i : I \to \mathbb{R},\ i,\ j \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou spojité funkce na I. Většinou budeme používat maticový zápis

$$Y' = A(x)Y + F(x), \tag{2}$$

kde

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

a $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ je vektor neznámých. Pokud jsou funkce a_{ij} nezávislé na x, jedná se o *soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty*:

$$Y' = AY + F(x). \tag{4}$$

Pokud $F(x) = 0$, $x \in I$, jedná se o *homogenní soustavu*:

$$Y' = A(x)Y. \tag{5}$$

Doplníme-li soustavu rovnic *počáteční podmínkou*

$$Y(a) = B, \tag{6}$$

kde $a \in I$ a $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, hovoříme o *počáteční úloze*.
Než si ukážeme, jak soustavy rovnic řešit, uvedeme několik vět, které nám řeknou, v jakém tvaru máme řešení očekávat.

Věta 1 (Existence a jednoznačnost)**.** *Pro každé $a \in I$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno maximální řešení počáteční úlohy* (2), (6) *. Toto řešení je definované na celém intervalu I.*

Věta 2 (Prostor řešení)**.** *1. Množina všech maximálních řešení homogenní rovnice* (5) *tvoří vektorový prostor dimenze n.*

2. *Je-li Y_p maximální řešení nehomogenní rovnice* (2)*, potom množina všech maximálních řešení rovnice* (2) *je*

$$\{Y_p + Y : Y \text{ je maximální řešení } (5)\}.$$

Bázi prostoru všech maximálních řešení z předchozí věty nazýváme *fundamentálním systémem* rovnice (5). Matici, jejíž sloupce tvoří prvky fundamentálního systému, nazveme *fundamentální maticí.* Obecné řešení soustavy (5) je pak $Y(x) = \Phi(x)c$, $c \in \mathbb{R}^n$.
V této kapitole se budeme zabývat především tím, jak nalézt fundamentální systém homogenní soustavy, a to pouze pro soustavy s konstantními koeficienty. Nalezení fundamentálního systému pro soustavy s nekonstantními koeficienty je obtížné až nemožné. Něco málo o takových problémech najdete v kapitole o variaci konstant, kde se rovněž zabýváme hledáním *partikulárního řešení* Y_p z Věty 2. V této kapitole budeme řešit pouze problémy s pravou stranou ve speciálním tvaru, pro něž lze partikulární řešení nalézt snadněji.
V této části se budeme zabývat soustavami rovnic s konstantními koeficienty, tj. především homogenní soustavou

$$Y' = AY, \tag{7}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ukážeme si několik postupů, jak lze homogenní (ale i nehomogenní) soustavy s konstantními koeficienty řešit. Začneme nejelementárnějším postupem a budeme postupovat k více sofistikovaným způsobům řešení.

Řešení soustav pomocí upravování soustavy

Upravujeme soustavu rovnic takovým způsobem, abychom získali jednu rovnici (typicky vyššího řádu) s jednou neznámou. Tímto způsobem (jak uvidíme na příkladech) je možné řešit i nehomogenní rovnice, pokud je funkce F dostatečně hladká. Tento způsob je vhodný pro soustavy 2 rovnic, případně je-li matice soustavy dostatečně řídká (obsahuje hodně nul). Pro větší soustavy (husté matice) je tento způsob poněkud nepřehledný.

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} y' &= 3y - 5z - 3e^x \\ z' &= y - z - e^x \end{aligned} \tag{8}$$

Řešení. Zderivujme druhou rovnici (potřebujeme tedy, aby "pravá strana", tj. $-3e^x$, $-e^x$ rovnice měla derivaci)

$$z'' = y' - z' - e^x\,.$$

Od první rovnice odečteme trojnásobek druhé rovnice

$$y' - 3z' = -2z\,.$$

Sečteme-li dvě nově získané rovnice a odečteme od obou stran y', máme

$$z'' - 3z' = -z' - 2z - e^x\,, \quad \text{nebo-li} \quad z'' - 2z' + 2z = -e^x\,. \tag{9}$$

Řešení homogenní rovnice $z'' - 2z' + 2z = 0$ jsou funkce

$$z(x) = ce^x \cos x + de^x \sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, c, d \in \mathbb{R}.$$

Protože pravá strana $-e^x$ je ve speciálním tvaru, bude existovat partikulární řešení ve tvaru $z_p(x) = ce^x$. Dosazením do rovnice dostáváme $c = -1$, řešení rovnice (9) tedy jsou

$$z(x) = ce^x \cos x + de^x \sin x - e^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

Z druhé rovnice původní soustavy dopočítáme

$$y(x) = z'(x) + z(x) + e^x = (2c + d)e^x \cos x + (2d - c)e^x \sin x - e^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Úlohy na přímé upravování soustavy rovnic

1.

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y\,, \\ y' &= 2y\,. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y\,, \\ y' &= 3x + 4y\,. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x' &= -5x - 6y\,, \\ y' &= 8x + 9y\,. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x' &= -5x - 4y\,, \\ y' &= 10x + 7y\,. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 4y\,, \\ y' &= -9x - 7y\,. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} x' &= -5x - y\,, \\ y' &= x - 3y - 9e^{2t}\,. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} x' &= x + 3y + t\,, \\ y' &= x - y\,. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} x' &= -4x - 4y + 2e^{2t}\,, \\ y' &= 6x + 6y + 2t\,. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y + e^{t}\,, \\ y' &= -4x - 2y + te^{t} \\ x(0) &= y(0) = 0\,. \end{aligned}$$

10.

$$x' = -2x + y$$
$$y' = -4x + 2y$$

11.

$$x' = -5x + 4y$$
$$y' = -9x + 7y$$

12.

$$\begin{aligned} x' &= x + y + z\,, \\ y' &= x + y - z\,, \\ z' &= 2x - y\,. \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + 3z \\ y' &= -2x + y + 5z \\ z' &= -x - y + 6z \end{aligned}$$

Řešení

1) Z druhé rovnice $y(t) = ce^{2t}$, z první rovnice pak $x' - 2x = ce^{2t}$. Řešením rovnice s pravou stranou ve speciálním tvaru je $x(t) = de^{2t} + x_p(t)$, kde $x_p(t) = cte^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, c, $d \in \mathbb{R}$.

2) Po úpravách $x'' - 6x' + 5x = 0$, tj. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $x(t) = ce^t + de^{5t}$, z první rovnice pak $y(t) = -ce^t + 3de^{5t}$, $t \in \mathbb{R}$, c, $d \in \mathbb{R}$.

3) Po úpravách dostaneme $-x'' + 4x' - 3x = 0$, tj. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $x(t) = ce^t + de^{3t}$ a následně z první rovnice je $y(t) = -ce^t - \frac{4}{3}de^{3t}$, $t \in \mathbb{R}$, c, $d \in \mathbb{R}$.

4) Po úpravách dostaneme $-x'' + 2x' - 5x = 0$, tj. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, $x(t) = ae^t \cos 2t + be^t \sin 2t$ a následně $y(t) = (-\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b)e^t \cos 2t + (\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b)e^t \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

5) Po úpravách máme $x'' + 2x' + x = 0$, tj. $\lambda_{1,2} = -1$, $x(t) = ae^{-t} + bte^{-t}$ a následně $y(t) = (-\frac{3}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{3}{2}bt)e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

6) Po úpravách vyjde $x'' + 8x' + 16x = 9e^{2t}$, tj. $\lambda_{1,2} = -4$, partikulární řešení vyjde (pomocí metody speciální pravé strany) $\frac{1}{4}e^{2t}$, tedy $x(t) = ae^{-4t} + bte^{-4t} + \frac{1}{4}e^{2t}$ a následně $y(t) = (-a - b - bt)e^{-4t} - \frac{7}{4}e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

7) Po úpravách $y'' - 4y = t$, tj. $\lambda_{1,2} = \pm 2$, partikulární řešení vyjde $-t/4$, tj. $y(t) = ae^{2t} + be^{-2t} - t/4$. Z druhé rovnice pak $x(t) = 3ae^{2t} - be^{-2t} - 1/4(t+1)$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

8) Po úpravách vyjde $-x'' + 2x' = 8e^{2t} + 8t$, tj. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, partikulární řešení vyjde (pomocí metody speciální pravé strany) $-4te^{2t} + 2t^2 + 2t$, tedy $x(t) = a + be^{2t} - 4te^{2t} + 2t^2 + 2t$ a následně $y(t) = 6te^{2t} + e^{2t}(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}b) - 2t^2 - 3t - \frac{1}{2} - a$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

9) Po úpravách vyjde $x'' - x' - 2x = 3e^t + te^t$, tj. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$, partikulární řešení vyjde (pomocí metody speciální pravé strany) $-\frac{7}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t$, tedy obecné řešení je $x(t) = ae^{2t} + be^{-t} - \frac{7}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t$ a následně $y(t) = -ae^{2t} - 4be^{-t} + 2e^t + te^t$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$. Řešení splňující počáteční podmínky má tvar $x(t) = \frac{5}{3}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-t} - \frac{7}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t$, $y(t) = -\frac{5}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} + 2e^t + te^t$, $t \in \mathbb{R}$.

10)

$$\begin{bmatrix} 1 - 2\,t & t \\ -4\,t & 1 + 2\,t \end{bmatrix} \tag{10}$$

11)

$$\begin{bmatrix} e^t - 6\,te^t & 4\,te^t \\ -9\,te^t & e^t + 6\,te^t \end{bmatrix} \tag{11}$$

12) Postupnými úpravami dostáváme $x''' - 2x'' - 3x' + 6x = 0$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 2, $\pm\sqrt{3}$, tedy $x = ae^{2t} + be^{\sqrt{3}t} + ce^{-\sqrt{3}t}$. Funkce y a z dopočítáme například z rovnic $z = -x'' + x' + 3x$, $y = x' - x - z$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Vyjde $z(t) = ae^{2t} + \sqrt{3}be^{\sqrt{3}t} - \sqrt{3}ce^{-\sqrt{3}t}$ a $y(t) = -be^{\sqrt{3}t} - ce^{-\sqrt{3}t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

13)

$$\begin{bmatrix} 1/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} + e^{3\,t} & 1/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & 2\,e^{4\,t} - e^{3\,t} - e^{2\,t} \\ -e^{3\,t} + 3/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & 3/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & 2\,e^{4\,t} + e^{3\,t} - 3\,e^{2\,t} \\ 1/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & 1/2\,e^{2\,t} - 1/2\,e^{4\,t} & -e^{2\,t} + 2\,e^{4\,t} \end{bmatrix}$$

Řešení soustav pomocí úprav λ-matice

Tento způsob řešení se od předchozího liší pouze formou zápisu. Díky přehlednějšímu formalismu však umožňuje řešit i větší soustavy. Buď λ operátor derivování, tj. $\lambda z := z'$, $\lambda^2 z = z''$, ... S využitím tohoto označení můžeme namísto operací s rovnicemi provádět operace s řádky matice, ve které se vyskytují polynomy v proměnné λ. Konkrétně se jedná o úpravy:

- záměna pořadí řádků matice,
- vynásobení řádku matice číslem,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde P je polynom.

Matici snadno upravíme na trojúhelníkový tvar pomocí Gaussovy eliminace. Navíc můžeme takto upravovat rozšířenou matici o sloupec pravých stran a řešit tak rovnou nehomogenní rovnici.
Pozor, není možné vynásobit řádek polynomem v λ, tím by se zvýšil řád soustavy. Také není možné polynomy dělit.

Příklad 2. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y - z\,, \\ y' &= 7x + 4y - z\,, \\ z' &= 13x + 7y - 3z\,. \end{aligned}$$

Řešení. S využitím zápisu pomocí λ dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda x - 2x - y + z &= 0\,, \\ -7x + \lambda y - 4y + z &= 0\,, \\ -13x - 7y + \lambda z + 3z &= 0\,. \end{aligned}$$

Upravujme tedy matici

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -7 & \lambda - 4 & 1 \\ -13 & -7 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Od druhého řádku odečteme první řádek a od třetího řádku odečteme $(\lambda+3)$ násobek prvního řádku:

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -(\lambda - 2)(\lambda + 3) - 13 & (\lambda + 3) - 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Od druhého řádku odečteme třetí řádek a poté od třetího řádku odečteme $(\lambda - 4)$-násobek druhého řádku

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ \lambda^2 + 2 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ \lambda^2 + 2 & 1 & 0 \\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V posledním řádku máme nyní rovnici $-x''' + 3x'' - 3x' + x = 0$, v matici je tedy rovnou charakteristický polynom této rovnice. Dostáváme tedy řešení

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Z druhého řádku matice dopočítáme y:

$$y(t) = -x'' - 2x = -e^t(3c_1 + 2c_2 + 2c_3 + t(3c_2 + 4c_3) + t^2 \cdot 3c_3)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Z první rovnice dopočítáme z:

$$z(t) = e^t(-2c_1 - 3c_2 - 2c_3 + t(-2c_2 - 6c_3) + t^2 \cdot (-2c_3))\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 3. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2y'' + 3z'' - 7y - 6z &= t + 1 \\ 4y'' + 3z'' - 4y - 3z &= 2t. \end{aligned}$$

Řešení. Napíšeme si λ-matici s pravou stranou:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2-7 & 3\lambda^2-6 & t+1 \\ 4\lambda^2-4 & 3\lambda^2-3 & 2t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2-7 & 3\lambda^2-6 & t+1 \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2-7-(\lambda^2-2)(2\lambda^2+3) & 0 & t+1-(t-1)''+2(t-1) \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} -2\lambda^4+3\lambda^2-1 & 0 & 3t-1 \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right).$$

Řešení charakteristického polynomu v prvním řádku jsou $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}/2$. Tedy řešení homogenní rovnice

$$-2y^{(4)} + 3y'' - y = 0$$

jsou

$$ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude ve tvaru $y_p(t) = rt + s$, což po dosazení do rovnice dává $y_p(t) = -3t + 1$. Tedy

$$y(t) = ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t} - 3t + 1\,.$$

Z druhé rovnice pak máme

$$\begin{aligned} 3z(t) &= t-1-2y''-3y = t-1-2(ae^t + be^{-t} + \frac{1}{2}ce^{\sqrt{2}/2t} + \frac{1}{2}de^{-\sqrt{2}/2t}) \\ &\quad -3(ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t} - 3t + 1) \\ &= 10t - 4 - 5ae^t - 5be^{-t} - 4ce^{\sqrt{2}/2t} - 4de^{-\sqrt{2}/2t}\,. \end{aligned}$$

Úlohy na úpravu λ-matice

14.

$$\begin{aligned} 5z' - 2y' + 4z - y &= e^{-t}\,, \\ z' + 8z - 3y &= 5e^{-t}\,. \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} z'' + y' + z &= e^t\,, \\ z' + y'' &= 1\,. \end{aligned}$$

16.

$$
\begin{aligned}
x' &= 5x + y - z\,,\\
y' &= x + 3y + z\,,\\
z' &= 7x + 3y + z\,.
\end{aligned}
$$

17.

$$
\begin{aligned}
x' &= x - 6y + 3z\,,\\
y' &= -8y + 6z\,,\\
z' &= 3x - 12y + 7z\,.
\end{aligned}
$$

18.

$$
\begin{aligned}
x' &= 7x - 10y - 4z\,,\\
y' &= 4x - 7y - 4z\,,\\
z' &= -6x + 7y + z\,.
\end{aligned}
$$

19.

$$
\begin{aligned}
x' &= 6x - 7y + 4z\,,\\
y' &= x + z\,,\\
z' &= -2x + 3y\,.
\end{aligned}
$$

20.

$$
\begin{aligned}
x' &= 2x - y + z + \cos t\,,\\
y' &= 5x - 4y + 3z + \sin t\,,\\
z' &= 4x - 4y + 3z + 2\sin t - 2\cos t\,.
\end{aligned}
$$

21.

$$
\begin{aligned}
x' &= x - 2y - z - 2e^t\,,\\
y' &= -x + y + z + 2e^t\,,\\
z' &= x - z - e^t\,.
\end{aligned}
$$

22.

$$
\begin{aligned}
x' &= 2x - 3y + t\,,\\
y' &= x - 2z - 3t^2\,,\\
z' &= -y + 2z + 3t - 2\,.
\end{aligned}
$$

23.

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y + e^{2t}\,, \\ y' &= 2y + 4z - 4e^{-t}\,, \\ z' &= x - z\,, \\ x(0) &= 0, y(0) = -1, z(0) = 1\,. \end{aligned}$$

Řešení

14) Postupnými úpravami dostáváme $z'' + z' - 2z = -4e^{-t}$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 1 a -2, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $2e^{-t}$, tedy $z(t) = 2e^{-t} + ae^{-2t} + be^{t}$. Funkci y dopočítáme z rovnice $z' + 8z - 3y = 5e^{-t}$. Vyjde $y(t) = 3e^{-t} + 2ae^{-2t} + 3be^{t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

15) Postupnými úpravami dostáváme $-z''' = 1 - e^{t}$. Nula je trojnásobný kořen charakteristického polynomu, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $e^{t} - \frac{1}{6}t^{3}$, tedy $z(t) = e^{t} - \frac{1}{6}t^{3} + a + bt + ct^{2}$ (stejný výsledek dostaneme i přímou integrací v upravené rovnici). Funkci y následně dopočítáme z rovnice $z'' + y' + z = e^{t}$. Vyjde $y'(t) = (-2 - b)e^{t} + \frac{1}{6}t^{3} - t^{2} - (a + c)$ a přímou integrací dostaneme $y(t) = d - t(a + c) - \frac{1}{3}t^{3} + \frac{1}{24}t^{4} - (2 + b)e^{t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

16) Postupnými úpravami dostáváme $-x'' + 5x' - 6x = 0$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 2 a 3, tedy $x(t) = ae^{3t} + be^{2t}$. Funkce y a z dopočítáme z rovnic $x' - 6x + y' - 4y = 0$ a $x' - 5x - y + z = 0$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $y' - 4y = 3ae^{3t} + 4be^{2t}$, tj. $\lambda_1 = 4$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $-3ae^{3t} - 2be^{2t}$ a tedy $y(t) = -3ae^{3t} - 2be^{2t} + ce^{4t}$. A z druhé je (pouhým dosazením) $z(t) = -ae^{3t} + be^{2t} + ce^{4t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

17) Postupnými úpravami dostáváme $y''' + 6y' + 20y = 0$. Kořeny charakteristického polynomu jsou -2 a $1 \pm 3i$, tedy $y(t) = ae^{-2t} + be^{t}\cos 3t + ce^{t}\sin 3t$. Funkce x a z dopočítáme z rovnic $y' + 8y - 6z = 0$ a $-3x + 12y + z' - 7z = 0$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Vyjde $z(t) = ae^{-2t} + (\frac{c}{2} + \frac{3b}{2})e^{t}\cos 3t + (\frac{3c}{2} - \frac{b}{2})e^{t}\sin 3t$, $x(t) = ae^{-2t} + \frac{c+b}{2}e^{t}\cos 3t + \frac{c-b}{2}e^{t}\sin 3t$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

18) Postupnými úpravami dostáváme $x''' - x'' - 5x' - 3x = 0$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 3 a dvakrát -1, tedy $x(t) = ae^{3t} + be^{-t} + cte^{-t}$. Funkce y a z dopočítáme z rovnic $-x'' - 2x' + 47x - 48y = 0$ a $x' - 7x + 10y + 4z = 0$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Vyjde $y(t) = \frac{2}{3}ae^{3t} + be^{-t} + cte^{-t}$, $z(t) = -\frac{2}{3}ae^{3t} + (-\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c - \frac{1}{2}ct)e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

19) Postupnými úpravami dostáváme $y'' - 4y' + 4y = 0$. Dvojnásobný kořen charakteristického polynomu je 2, tedy $y(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$. Funkce x a z dopočítáme z rovnic $x' - 2x + 7y - 4y' = 0$ a $-x + y' - z = 0$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $x' - 2x = ae^{2t} + 4be^{2t} + bte^{2t}$, tj. $\lambda_1 = 2$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $(a+4b)te^{2t} + \frac{b}{2}t^2e^{2t}$ a tedy $x(t) = ce^{2t} + (a+4b)te^{2t} + \frac{b}{2}t^2e^{2t}$. A z druhé je (pouhým dosazením) $z(t) = (2a+b-c)e^{2t} - (a+2b)te^{2t} - \frac{b}{2}t^2e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

20) Postupnými úpravami dostáváme $x'' - 2x' + x = -2\cos t$. Dvojnásobný kořen charakteristického polynomu je 1, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $\sin t$, tedy $x(t) = ae^t + bte^t + \sin t$. Funkce y a z dopočítáme z rovnic $x - 3x' + y' + y = \sin t - 3\cos t$ a $x' - 2x + y - z = \cos t$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $y' + y = (2a + 3b)e^t + 2bte^t$, tj. $\lambda_1 = -1$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $(2a+b+2bt)e^t$ a tedy $y(t) = ce^{-t} + (2a+b+2bt)e^t$. A z druhé je (pouhým dosazením) $z(t) = ce^{-t} + (a+2b+bt)e^t - 2\sin t$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

21) Postupnými úpravami dostáváme $-x'' + 2x' = 3e^t$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 0 a 2, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $3e^t$, tedy $x(t) = a + be^{2t} + 3e^t$. Funkce y a z dopočítáme z rovnic $x' + y' + y = 0$ a $x' - x + 2y + z = -2e^t$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $y' + y = -2be^{2t} - 3e^t$, tj. $\lambda_1 = -1$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $-\frac{3}{2}e^t - \frac{2}{3}be^{2t}$ a tedy $y(t) = ce^{-t} - \frac{3}{2}e^t - \frac{2}{3}be^{2t}$. A z druhé je (pouhým dosazením) $z(t) = a - 2ce^{-t} + e^t + \frac{1}{3}be^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

22) Postupnými úpravami dostáváme $y'' - 2y' + y = 6t^2 - 11t + 4$. Dvojnásobný kořen charakteristického polynomu je 1, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $6t^2 + t - 6$, tedy $y(t) = ae^t + bte^t + 6t^2 + t - 6$. Funkce x a z dopočítáme z rovnic $y + z' - 2z = 3t - 2$ a $-x + y' + 2z = -3t^2$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Z první vyjde rovnice $z' - 2z = -ae^t - bte^t - 6t^2 + 2t + 4$, tj. $\lambda_1 = 2$, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je $bte^t + (a+b)e^t + 3t^2 + 4t$ a tedy $z(t) = ce^{2t} + bte^t + (a+b)e^t + 3t^2 + 4t$. A z druhé je (pouhým dosazením) $x(t) = 3bte^t + (3a+3b)e^t + 2ce^{2t} + 3t^2 + 20t + 1$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

23) Postupnými úpravami dostáváme $z''' - 3z'' = -4e^{-t}$. Kořeny charakteristického polynomu jsou 3 a dvakrát 0, partikulární řešení (metodou speciální pravé strany) je e^{-t}, tedy $z(t) = a + bt + ce^{3t} + e^{-t}$. Funkce x a y dopočítáme z rovnic $-x + z' + z = 0$ a $x' - 2x - y = e^{2t}$, ke kterým jsme došli během výpočtu. Vyjde $x(t) = a + b + bt + 4ce^{3t}$, $y(t) = -2a - b - 2bt + 4ce^{3t} - e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$. Řešení splňující počáteční podmínku má tvar $x(t) = 0$, $y(t) = -e^{2t}$, $z(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení soustav pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů

Třetí způsob, jak lze řešit homogenní rovnice, je založen na maticové exponenciále, o které bude blíže pojednáno v jiné kapitole. Zde jen uveďme následující věty, ze kterých plyne, jak postupovat při řešení soustav rovnic.

Věta 3. *Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů $q_1, q_2, \dots, q_n$ příslušných po řadě vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Potom funkce*

$$e^{\lambda_1 t} q_1,\ e^{\lambda_2 t} q_2,\ \dots,\ e^{\lambda_n t} q_n \tag{12}$$

tvoří fundamentální systém soustavy (7)*.*

Poznámka. Předcházející věta nepožaduje, aby $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ byla navzájem různá. Pokud má matice A n různých vlastních čísel, pak má jistě n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Pokud se některé vlastní číslo opakuje, tedy má větší násobnost než jedna, pak může, ale nemusí existovat n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Pokud neexistuje n lineárně nezávislých vlastních vektorů, je situace složitější. Tímto případem se budeme zabývat níže.

Příklad 4. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= -8x + 21y\,, \\ y' &= -3x + 8y\,. \end{aligned}$$

Řešení. Vypočítejme vlastní čísla matice:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 8)(\lambda - 8) + 3 \cdot 21 = \lambda^2 - 1.$$

Vlastní čísla matice jsou tedy $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Vlastní vektor v příslušný k vlastnímu číslu 1 splňuje

$$(I - A)v = 0\,, \quad \text{tj.} \quad 9v_1 - 21v_2 = 0.$$

Máme tedy například $v = (7, 3)$. Podobně vlastní vektor w příslušný k vlastnímu číslu -1 splňuje

$$(-I - A)w = 0\,, \quad \text{tj.} \quad 7w_1 - 21w_2 = 0.$$

Máme tedy například $w = (3, 1)$. Fundamentální systém soustavy je tedy

$$e^t \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix},\ e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A nyní k případu, kdy neexistuje n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Řekneme, že $v_1, \ldots, v_k$ je *řetězec přidružených vlastních vektorů* příslušný vlastnímu číslu λ, pokud

$$(\lambda - A)v_1 = 0, \ (\lambda - A)v_2 = v_1, \ \ldots, \ (\lambda - A)v_k = v_{k-1}.$$

Věta 4. *Nechť $v_1, \ldots, v_k$ je řetězec přidružených vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu λ. Pak funkce*

$$e^{\lambda t}v_1, \ e^{\lambda t}(v_1 t + v_2), \ e^{\lambda t}\left(v_1\frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right),$$
$$\ldots, \ e^{\lambda t}\left(v_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + v_{k-1}t + v_k\right)$$

jsou lineárně nezávislá řešení soustavy (7).

Situace vypadá tak, že každé Jordanově buňce odpovídá jeden vlastní vektor a pokud je velikost Jordanovy buňky větší než jedna, pak i řetězec přidružených vlastních vektorů, který je stejně dlouhý jako velikost buňky. Podle předchozí věty tedy každé Jordanově buňce o velikosti k odpovídá k-lineárně nezávislých řešení. Najdeme-li takováto řešení pro všechny Jordanovy buňky, budou tato řešení dohromady tvořit fundamentální systém soustavy. Pokud však má matice kořeny, které nejsou reálné, ani tento fundamentální systém nebude reálný. Abychom získali reálný fundamentální systém, musíme pro $(\lambda = a+bi, v = v_1+iv_2)$ a $(\bar{\lambda} = a-bi, \bar{v} = v_1-iv_2)$ nahradit řešení

$$e^{\lambda t}v, \, e^{\bar{\lambda}t}\bar{v} \quad \text{řešeními} \quad e^{at}(\cos(bt)v_1 - \sin(bt)v_2), \, e^{at}(\cos(bt)v_2 + \sin(bt)v_1).$$

Příklad 5. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= x + 4z \\ y' &= x + y + z \\ z' &= -4x + z. \end{aligned}$$

Řešení. Spočítáme vlastní čísla matice:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 + 16(1-\lambda) = (1-\lambda)(17 - 2\lambda + \lambda^2).$$

Tedy $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 17}) = 1 \pm 4i$. Spočítáme vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. $u = (0, 1, 0)$. K vlastnímu číslu $1 + 4i$:

$$\begin{pmatrix} -4i & 0 & 4 \\ 1 & -4i & 1 \\ -4 & 0 & -4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4i & 0 & 4 \\ 1 & -4i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. $v = (4, 1 - i, 4i)$. K vlastnímu číslu $1 - 4i$ máme vlastní vektor komplexně sdružený, tedy $w = \bar{v} = (4, 1 + i, -4i)$. Komplexní fundamentální systém tedy je

$$e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e^t(\cos(4t) + i\sin(4t)) \begin{pmatrix} 4 \\ 1-i \\ 4i \end{pmatrix}, \ e^t(\cos(4t) - i\sin(4t)) \begin{pmatrix} 4 \\ 1+i \\ -4i \end{pmatrix}.$$

Reálný fundamentální systém je potom

$$e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e^t \cos(4t) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^t \sin(4t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ e^t \cos(4t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + e^t \sin(4t) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= 10x - 13y + 6z - 19w\,, \\ y' &= -3x + 7y - 2z + 7w\,, \\ z' &= 5x - 8y + 6z - 12w\,, \\ w' &= 7x - 11y + 6z - 15w \end{aligned}$$

Řešení. Spočtěme nejdříve vlastní čísla matice:

$$\det \begin{pmatrix} 10-\lambda & -13 & 6 & -19 \\ -3 & 7-\lambda & -2 & 7 \\ 5 & -8 & 6-\lambda & -12 \\ 7 & -11 & 6 & -15-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 8-3\lambda & 0 & 2 \\ -3 & 7-\lambda & -2 & 7 \\ -8+3\lambda & 26-13\lambda+\lambda^2 & 0 & 18-7\lambda \\ -2 & 10-3\lambda & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 8-3\lambda & 2 \\ -8+3\lambda & 26-13\lambda+\lambda^2 & 18-7\lambda \\ -2 & 10-3\lambda & 6-\lambda \end{pmatrix},$$

což po výpočtech dává

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16,$$

tedy $\lambda = 2$ je čtyřnásobné vlastní číslo.
Hledejme nyní vlastní vektory.

$$\begin{pmatrix} 8 & -13 & 6 & -19 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 5 & -8 & 4 & -12 \\ 7 & -11 & 6 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Získáváme tedy pouze dva lineárně nezávislé vlastní vektory, např. $u = (2, 0, 1/2, 1)$ a $v = (2, 1, -1/2, 0)$. To znamená, že matice má buď dvě Jordanovy buňky velikosti 2, nebo jednu velikosti 1 a jednu velikosti 3. Zkusíme tedy hledat přidružené vlastní vektory, nevíme ale, ke kterému vektoru je máme hledat, řešíme tedy rovnici

$$\begin{pmatrix} 8 & -13 & 6 & -19 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 5 & -8 & 4 & -12 \\ 7 & -11 & 6 & -17 \end{pmatrix} v_2 = au + bv,$$

tj.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -13 & 6 & -19 & 2a+2b \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b \\ 5 & -8 & 4 & -12 & \frac{a}{2}-\frac{b}{2} \\ 7 & -11 & 6 & -17 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 & 2a+5b \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b \\ -1 & 2 & 0 & 2 & \frac{a}{2}+\frac{3b}{2} \\ -2 & 4 & 0 & 4 & a+3b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 & 2a+5b \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}a-\frac{7}{2}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3a-7b \end{array}\right).$$

Odtud máme $3a = -7b$, můžeme volit $a = 7$, $b = -3$, tedy vektor v_1 (počátek řetězce) je $(8, -3, 5, 7)$. Protože počátek řetězce je jen jeden (až na násobek), je jen jedna Jordanova buňka větší než jedna. Máme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & -3 \end{array}\right),$$

což dává řešení $v_2 = (3, 1, -1/2, 0) + a_2(2, 0, 1/2, 1) + b_2(2, 1, -1/2, 0)$. Hledejme vektor v_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -13 & 6 & -19 & 2a_2+2b_2+3 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & b_2+1 \\ 5 & -8 & 4 & -12 & \frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2} \\ 7 & -11 & 6 & -17 & a_2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & \Big| & 2a_2+5b_2+6 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & \Big| & b_2+1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & \Big| & \frac{1}{2}a_2+\frac{3}{2}b_2+\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & 0 & 4 & \Big| & a_2+3b_2+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & \Big| & 2a_2+5b_2+6 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & \Big| & b_2+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Big| & -\frac{3}{2}a_2-\frac{7}{2}b_2-\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Big| & -3a_2-7b_2-9 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy je například $b_2 = 0$, $a_2 = -3$ (tedy $v_2 = (-3, 1, -2, -3)$) a v_3 splňující

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & \Big| & 0 \\ -3 & 5 & -2 & 7 & \Big| & 1 \end{pmatrix},$$

tj. např. $v_3 = (0, 0, -1/2, 0)$. Fundamentální systém soustavy je tedy:

$$e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ e^{2t}\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},\ e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right),$$

$$e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Úlohy k řešení pomocí vlastních vektorů matice

24.

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y\,, \\ y' &= -4x + 2y\,. \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2y - 2z\,, \\ y' &= 2x + 5y - 4z\,, \\ z' &= -2x - 4y + 5z\,. \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 4y - z\,, \\ y' &= -2x - 4y + 4z\,, \\ z' &= -4x + 2y - z\,. \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned} x' &= 5x - y + 2z\,, \\ y' &= -x + 3y - z\,, \\ z' &= -4x + 2y - z\,. \end{aligned}$$

28.

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + 3z \\ y' &= 2x + 4y + 6z \\ z' &= 3x + 6y + 9z \end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned} x' &= y - z \\ y' &= -y + z \\ z' &= x - z \end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned} x' &= -3x + z \\ y' &= -3y + 2z \\ z' &= 3x - 2y - 3z \end{aligned}$$

31.

$$\begin{aligned} x' &= 6x - 7y + 4z \\ y' &= x + z \\ z' &= -2x + 3y \end{aligned}$$

Řešení

24) Nula je dvojnásobné vlastní číslo. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 0 je $v_1 = (c, 2c)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ a přidružený vektor $v_2 = (a, b)$ musí splňovat $-2a + b = c$, tedy např. pro $c = 1$, $b = 0$ máme řetězec vlastních vektorů $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-\frac{1}{2}, 0)$ příslušných vlastnímu číslu 0. Fundamentální systém tedy je

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

25) Vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 10$, příslušné vlastní vektory jsou $v_1 = (-2, 1, 0)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (1, 2, -2)$. Tedy fundamentální systém je

$$e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

26) Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3i$, $\lambda_3 = -3i$, číslu λ_1 přísluší vlastní vektor $v_1 = (-1, 1, 1)$, číslu λ_2 přísluší vektor $v_2 = (-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i, 1)$ a číslu λ_2 přísluší vektor $v_3 = (-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i, \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i, 1)$. Tedy reálný fundamentální systém je

$$e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \cos 3t \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}\\0\end{pmatrix}, \cos 3t \begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}\\0\end{pmatrix} + \sin 3t \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix}.$$

27) Vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 3$, číslu λ_1 přísluší řetězec vlastních vektorů $v_1 = (-1, 1, 2)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ a číslu λ_3 přísluší vektor $v_3 = (1, 0, -1)$. Tedy fundamentální systém je

$$e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, e^{2t}\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right].$$

28) Vlastní číslo 0 má vlastní vektory $(-2, 1, 0)$ a $(-3, 0, 1)$, vlastní číslo 14 má vlastní vektor $(1, 2, 3)$. Fundamentální systém je tedy

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}, e^{14t}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

29) Fundamentální systém je

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, e^{-t}\cos t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - e^{-t}\sin t\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, e^{-t}\cos t\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + e^{-t}\sin t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

30) Fundamentální systém je

$$e^{-3t}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, e^{-3t}\cos t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - e^{-t}\sin t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, e^{-t}\cos t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + e^{-t}\sin t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

31) Fundamentální systém je

$$e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, e^{2t}\begin{pmatrix}t+4\\1\\-t-2\end{pmatrix}, e^{2t}\begin{pmatrix}t^2/2+4t+1\\t\\-t^2/2-2t\end{pmatrix}.$$