Rovnice se separovanými proměnnými

V této kapitole se budeme zabývat následující diferenciální rovnicí:

$$y' = g(y)f(x), \tag{1}$$

kde f a g jsou reálné funkce reálné proměnné. Tato rovnice se nazývá *rovnice se separovanými proměnnými.* V celé kapitole budou písmena I, J označovat otevřené intervaly.

Ihned vidíme, že pokud $g(y_0) = 0$, je $y(x) = y_0$ řešením rovnice definovaným na všech intervalech obsažených v definičním oboru funkce f. Toto řešení se nazývá *stacionární.* Základní věta, která nám umožní najít netriviální řešení rovnice se separovanými proměnnými, je následující:

Věta 1 (Řešení rovnice se separovanými proměnnými)**.** *Je dána rovnice* (1)*. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá a nenulová v J. Nechť $F(x)$ resp. $G(y)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$ resp. $1/g(y)$ v I resp. v J.*

Označ $G^{-1}(z)$ funkci inverzní ke $G(y)$. Nechť $\tilde{I} \subset I$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou zvoleny tak, že $F(x)+c$ leží v definičním oboru $G^{-1}(z)$ (tj. v $G(J)$) pro všechna $x \in \tilde{I}$.

Potom funkce

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)\,, \quad x \in \tilde{I}$$

je řešení rovnice (1)*.*

Poznámka. Předpoklad "$F(x) + c$ leží oboru hodnot G" je potřeba hlídat – formální výpočet totiž může vést k funkci, jejíž definiční obor je větší než interval, na níž tato funkce řeší naši rovnici.

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$.

Řešení. Ihned vidíme jediné stacionární řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Dále aplikací předchozí věty nacházíme řešení

1. pro $I = \mathbb{R}$, $J = (-\infty, 0)$: $G(y) = -\sqrt{-y}$, $F(x) = x$. Tedy $G(J) = (-\infty, 0)$, $\tilde{I} = (-\infty, -c)$. nalezené řešení $y(x) = -(x+c)^2$, $x \in (-\infty, -c)$. **Pozor:** pro $x > -c$ daná funkce NENÍ řešení rovnice.

2. pro $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$: $G(y) = \sqrt{y}$, $G(J) = (0, \infty)$. Nalezené řešení $y(x) = (x + c)^2$, $x \in (-c, \infty)$. (Opět není řešení pro $x < -c$).

Nevíme však zatím, zda jsou tato řešení maximální a zda jsou všechna.

Někdy se může stát, že řešení, které nám dává Věta 1, nejsou maximální. Máme-li řešení na intervalech (a, b) a (b, c), je možné, že se nám povede funkci spojitě dodefinovat v bodě b a že získáme řešení na větším intervalu (a, c). O této situaci hovoří následující lemma:

Lemma 2 (O slepování). *Nechť* $y_1(x) : (a, x_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(x) : (x_0, b) \to \mathbb{R}$ *jsou řešení rovnice*

$$y' = f(x, y)\,. \tag{2}$$

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim\limits_{x\to x_0+} y_2(x)$. *Nechť* $f(x, y)$ *je spojitá v bodě* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Potom funkce*

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0) \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

je řešením rovnice (2) *v celém* (a, b).

Poznámka. Lemma 2 řeší vlastně jedinou věc: že rovnice je splněna v bodě slepení (x_0, y_0) (jinde je to z předpokladů triviálně jasné) a říká, že to je zaručeno, slepím-li řešení spojitě. Může však nastat i situace, že dvě řešení je možné slepit, přestože v bodě lepení není funkce f spojitá.

Řešení. (pokračování) Funkce

$$y(x) = \begin{cases} -(x + c)^2, & x < -c \\ 0, & x \geq -c \end{cases}$$

je dle Lemmatu 2 řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$ v $\mathbb{R}$, neboť vznikne slepením dvou řešení: $y_1(x) = -(x + c)^2$ v $(-\infty, -c)$ a $y_2(x) = 0$ v $(-c, \infty)$. Také funkce

$$y(x) = \begin{cases} (x + c)^2, & x > -c \\ 0, & x \leq -c \end{cases}$$

je řešením rovnice. Tato řešení jsou evidentně maximální, neboť jsou definována na celém $\mathbb{R}$. Zbývá dořešit otázku, zda jsou všechna (samozřejmě nezapomínáme na nulové stacionární řešení).

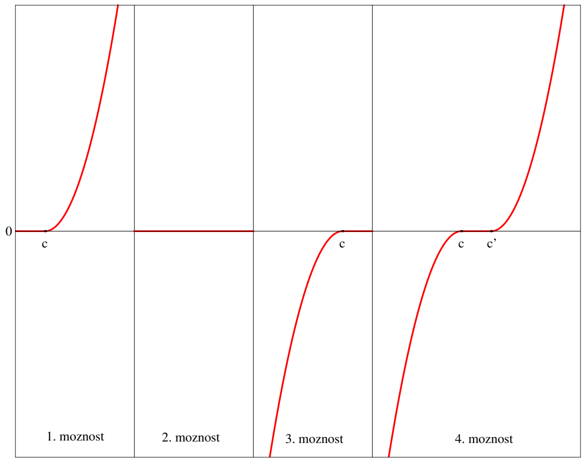
Jak poznáme, že jsme nalezli *všechna* maximální řešení? Picardova věta o existenci a jednoznačnosti nám dává jednoznačnost řešení v bodech, na jejichž okolí jsou funkce $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ a $(x, y) \mapsto f(x)g'(y)$ spojité. Máme-li tedy oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, v níž jsou tyto funkce spojité, a najdu-li sadu řešení, které Ω vyplní (každým bodem prochází aspoň jedno z nich), pak žádná jiná řešení nejsou. Naopak body, v nichž $g'(y)$ neexistuje, jsou obvykle kandidáti na *větvení.* (V bodě (x_0, y_0) nastává *větvení*, jestliže jím procházejí dvě řešení, která se neshodují na žádném $P(x_0, \delta)$.)

V případě rovnice se separovanými proměnnými však platí silnější věta o jednoznačnosti:

Tvrzení 3 (o jednoznačnosti)**.** *Jsou-li f a g spojité v Ω, pak k větvení může dojít pouze v bodech, v nichž g' neexistuje nebo není spojitá a zároveň $g = 0$.*

Nepotřebujeme tedy spojitost $(x, y) \mapsto f(x)g'(y)$, pokud g je nenulová. Toto tvrzení si můžete dokázat jako cvičení (viz níže).

Řešení. (dokončení) Uvažme opět rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$. Sada řešení $y_c(x) = (x-c)^2$, $x \in (c, \infty)$ zjevně vyplňuje horní polorovinu $\Omega = \{(x, y),\ y > 0\}$ (bodem $(x_0, y_0) \in \Omega$ prochází řešení, kde $c = x_0 - \sqrt{y_0}$). Protože f i g jsou v Ω spojité a g navíc nenulová, žádná jiná řešení zde nemohou být. Řešení tvaru $-(x+c)^2$ podobně vyplní dolní polorovinu. K větvení tedy může dojít pouze v bodech $(x_0, 0)$ a všechna tato větvení jsme našli.



Takto tedy vypadá celý postup hledání maximálních řešení rovnice (1):

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce f. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, potom funkce $y \equiv c$ na libovolném intervalu z 1. kroku je stacionární řešení rovnice (1).

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy f je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (1), která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro něj platí
$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Potom existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = F(x) + c$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ F(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (1).

Příklad 2. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = 2x(1 + y^2)$$

Řešení. Bod 1: $I = \mathbb{R}$. Bod 2: rovnice nemá žádné stacionární řešení. Bod 3: $J = \mathbb{R}$. Bod 4: po vydělení $1 + y^2$ a integraci dostáváme

$$\operatorname{arctg} y = x^2 + c. \tag{3}$$

Protože máme jen jeden interval pro x a jeden pro y, nemusíme zde rozlišovat několik případů a úloha se tím výrazně zjednodušuje. Bod 5: protože funkce $G = \operatorname{arctg}$ zobrazuje $J = \mathbb{R}$ na $(-\pi/2, \pi/2)$, musí pravá strana rovnosti (3) ležet v intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, tj.

$$x^2 \in (-\pi/2 - c, \pi/2 - c)\,.$$

Pokud $c \le -\pi/2$, je řešení definované na intervalech $x \in (-\sqrt{\pi/2 - c}, -\sqrt{-\pi/2 - c})$ a $x \in (\sqrt{-\pi/2 - c}, \sqrt{\pi/2 - c})$. Pokud $c \in (-\pi/2, \pi/2)$, pak je definované na intervalu $(-\sqrt{\pi/2 - c}, \sqrt{\pi/2 - c})$. Pokud $c \ge \pi/2$, řešení neexistuje. Řešení je dané předpisem

$$y = \operatorname{tg}(x^2 + c).$$

Bod 6: Protože v krajních bodech intervalů $(\pm\sqrt{\pm\pi/2 - c})$ je $\lim y(x) = \pm\infty$, nalezená řešení nelze prodloužit, jsou tedy maximální. Z věty o jednoznačnosti plyne, že jsme nalezli všechna řešení, protože každým bodem roviny prochází některé z námi nalezených řešení. Skutečně, bodem $[x_0, y_0]$ prochází řešení $y = \operatorname{tg}(x^2 + c)$, kde $c = \operatorname{arctg} y_0 - x_0^2$, definované na intervalu $(-\sqrt{\pi/2 - c}, -\sqrt{-\pi/2 - c})$, je-li $x_0 < 0$, $\operatorname{arctg} y_0 - x_0^2 \leq -\pi/2$, nebo na intervalu $x \in (\sqrt{-\pi/2 - c}, \sqrt{\pi/2 - c})$, je-li $x_0 > 0$, $\operatorname{arctg} y_0 - x_0^2 \leq -\pi/2$ a nebo na intervalu $(-\sqrt{\pi/2 - c}, \sqrt{\pi/2 - c})$, je-li $\operatorname{arctg} y_0 - x_0^2 \in (-\pi/2, \pi/2)$.