Řešení.

21) Převedením na systém máme tvar (14), kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Existence optimální regulace je zaručena Větami 4, 5. Princip maxima dává

$$(-h_1 \sin t + h_2 \cos t)u(t) = \max_{|\eta|\le 1}(-h_1 \sin t + h_2 \cos t)\eta,$$

pro vhodný nenulový vektor (h_1, h_2). Lze psát $(h_1, h_2) = (a \sin\omega, a\cos\omega)$, kde $a > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Odsud $\max_\eta \eta a \cos(t+\omega)$; vidíme, že optimální u mění hodnotu 1 a -1 s periodou π, přesněji

$$u(t) = \operatorname{sgn}\cos(t+\omega). \tag{26}$$

Pro $u = \pm 1$ jsou řešení kružnice (v rovině (x, x')) o středech $(\pm 1, 0)$. Lze si rozmyslet, že pro každou počáteční podmínku existuje jediná optimální regulace ve tvaru (26).

22) Hamiltonián $H = pu - \alpha u^2$ má jediné maximum pro $u = p/2\alpha$. V optimálním případě máme tedy $x' = p/2\alpha$, $x(0) = 0$; adjungovaná úloha je $p' = 2x - 2z$, $p(T) = 0$. To lze převést na jedinou rovnici

$$x'' - \frac{x}{\alpha} = -\frac{z}{\alpha}, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = c,$$

kde c určíme tak, aby $x'(T) = 0$ ($\iff$ $p(T) = 0$). Pro uvedené konkrétní hodnoty máme za prvé

$$x = 1 - \cosh(t/\sqrt{\alpha}) + c\sqrt{a}\sinh(t/\sqrt{\alpha}) \tag{i}$$

odsud $c = \tanh(T/\sqrt{\alpha})$. Ve druhém případě

$$x = t - \sqrt{\alpha}(c-1)\sinh(t/\sqrt{\alpha}); \tag{ii}$$

odsud $c - 1 = 1/\cosh(T/\sqrt{\alpha})$. Konečně zatřetí

$$x = \frac{\cos t}{2} + \frac{2c-1}{4}e^{t} + \frac{2c+1}{4}e^{-t}; \tag{iii}$$

odsud $c = \tanh(2\pi)/2$.

23) Hamiltonián $H = px - x^2 + pu - u^2$ má jediné maximum pro $u = p/2$. Adjungovaná úloha má tvar $p' = 2x - p$, $p(T) = 0$. Je tedy nutno nalézt řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x + p/2, \qquad x(0) = x_0, \\ p' &= 2x - p, \qquad p(0) = p_0, \end{aligned}$$

kde p_0 volíme tak, aby $p(T) = 0$. Zpětná vazba: označme $d(t) = p(t)/x(t)$, tj. $c(t) = d(t)/2$. Rovnice pro $d(t)$ je po dosazení

$$d' = 2 - 2d - \frac{d^2}{2}, \qquad d(T) = 0.$$

Její řešení najdeme konečně ve tvaru $d(t) = 2b'(t)/b(t)$, kde pomocná funkce $b(t)$ splňuje rovnici

$$b'' + 2b' - b = 0, \qquad b(T) = 1,\ b'(T) = 0,$$

kterou již umíme řešit.

24) $u = 2$, $x = 6e^t - 2$ na $[0, t_0]$; $u = 0$, $x = (6 - 2e^{-t_0})e^t$ na $[t_0, 2]$, kde $t_0 = 2 - \ln(5/2)$.

25) $u = 2$, $x = 7e^{-t} - 2$ na $[0, 4]$.

26) $u = -t/2 + 1$, $x = -t^2/4 + t$ na $[0, 2]$.

27) $u = c_1(\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$, $x = -c_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t} + c_1 e^{\sqrt{2}t}$, kde c_1, c_2 volíme tak, aby $x(0) = 1$ a $u(1) = 0$.