Časově optimální regulace. Princip maxima.

Nyní se budeme zabývat opět lineární úlohou

$$x' = Ax + Bu, \tag{14}$$

ovšem za předpokladu omezených hodnot přípustných regulací. Přesněji řečeno, požadujeme

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u : (0,t) \to U \text{ měřitelné, } U = [-1,1]^m\} \tag{15}$$

Cílem je zvolit $u(\cdot)$ takové, že $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0$ v nejkratším možném čase.

Všimněme si nejprve otázek regulovatelnosti úlohy (14–15). Označíme opět

$$\mathcal{R}(t) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n;\ x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0 \text{ pro vhodné } u(\cdot) \in \mathcal{U}\ \}$$

a dále definujme

$$\mathcal{R} = \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t).$$

Potom platí následující věta.

Věta 4. *Nechť matice $\mathcal{K}(A,B)$ má hodnost n. Potom pro každé $t > 0$ je úloha (14–15) lokálně regulovatelná, tj. obsahuje $\mathcal{R}(t)$ okolí 0.*

Jestliže navíc $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ pro každé vlastní číslo λ matice A, je úloha globálně regulovatelná, tj. $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$.

Otázka *existence* časově optimální regulace je též snadno řešitelná – a to díky linearitě rovnice a konvexitě množiny U.

Věta 5. *Nechť $x_0 \in \mathcal{R}(t)$ pro nějaké $t > 0$. Potom existuje $t^* \leq t$ a $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ takové, že $x_0 \xrightarrow[u^*(\cdot)]{t^*} 0$, kde čas t^* je nejmenší možný.*

Následující věta dává *nutnou* podmínku optimality dané regulace.

Věta 6 (Pontrjaginův princip maxima). *Nechť $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ přivádí rovnici* (14) *do 0 v optimálním – tj. nejmenším možném – čase t. Potom existuje nenulový vektor $h \in \mathbb{R}^n$ tak, že*

$$h^T \exp(-sA)Bu(t) = \max_{\eta\in[-1,1]^m} h^T \exp(-sA)B\eta \tag{16}$$

pro skoro všechna $s \in (0,t)$.

Poznámka. Připomeňme si Lagrangeovu větu o multiplikátorech. Nutnou podmínkou toho, aby bod x byl extrémem funkce $f(x)$ vzhledem k množině $\{x;\ g_1(x) = 0,\ \ldots,\ g_k(x) = 0\}$, je – za vhodných předpokladů na hladkost funkcí f, g_j – existence čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ takových, že

$$\nabla g(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(x). \tag{17}$$

Při řešení příkladů obvykle nemusíme počítat hodnoty λ_j; z rovnice (17) získáme jakousi částečnou informací, díky níž omezíme množinu ,,podezřelých" bodů na několik málo prvků. Spolu s informací o *existenci* extrémů pak ,,pachatele" snadno identifikujeme.

Zde je situaci podobná: podmínka (16) působí dosti záhadně, ovšem v konkrétním případě snadno poskytne dost informace, abychom mohli identifikovat tvar optimální regulace.

Příklad 3 – pokračování. Hledejme regulaci $u : (0, t) \to [-1, 1]$, která zaparkuje v nejkratším čase. Její existence je zaručena Větami 4, 5 spolu s nulovostí spektra matice A. Přímo z definice se lehce spočítá, že

$$\exp(-sA) = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dle Pontrjaginova principu maxima existuje nenulový vektor $h = (h_1, h_2)$ takový, že

$$(h_2 - h_1 s)u(s) = \max_{\eta \in [-1,1]} (h_2 - h_1 s)\eta.$$

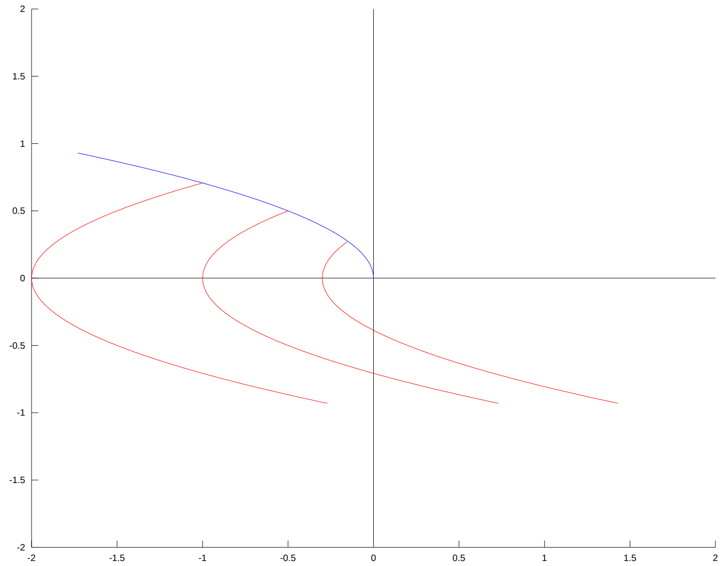
Odtud lehce plyne, že $u(s) = \operatorname{sgn}(h_2 - h_1 s)$ pro s.v. s. To speciálně znamená, že u nabývá pouze hodnot ± 1 a ke změně znaménka dojde nejvýše jednou. Za účelem konstrukce optimálních regulací je užitečné načrtnout chování systému pro $u = \pm 1$. Snadno se ukáže, že odpovídající první integrály jsou paraboly

$$\pm x = c - \frac{m}{2}(x')^2.$$

Optimální regulaci je nejlépe konstruovat pozpátku: pro $u = -1$ vidíme na obrázku řešení, přivádějící systém v konečném čase do počátku (modré). K této trajektorii dorazíme pomocí $u = 1$ (červená). Není obtížné si rozmyslet, že libovolnou počáteční podmínku lze takto regulovat *právě jedním* způsobem.

Princip maxima – obecný případ.

Na závěr zformulujeme Pontrjaginův princip maxima v obecném tvaru coby *nutnou* podmínku optimálního řízení.



Obrázek 7: Příklad 3 – řešení pro $u = -1$ (modré) a $u = 1$ (červené).

Uvažujeme obecnou úlohu

$$x' = f(x, u), \tag{18}$$

s přípustnými regulacemi tvaru

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} = \big\{ u : (0, T) \to U;\ u \text{ je měřitelná a } u(s) \in U \text{ pro s.v. } s \big\}, \tag{19}$$

kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je libovolná množina. Cílem je maximalizovat funkcionál

$$P[u(\cdot)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(t), u(t))\, dt. \tag{20}$$

Zavedeme následující pojmy. Hamiltonián $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jako

$$H(x, p, a) = f(x, a) \cdot p + r(x, a)$$

a tzv. adjungovanou úlohu

$$p' = -\nabla_x H(x, p, u) \tag{21}$$

Věta 7. *Nechť $u(\cdot)$ je maximum úlohy (18–20), kde čas $T > 0$ a počáteční podmínka $x(0) = x_0$ jsou zadány, zatímco $x(T)$ je neurčeno. Předpokládejme, že funkce f, r a g jsou spojité a mají spojité derivace vzhledem k x.*

Potom pro s.v. $s \in (0, T)$ platí

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{\eta \in U} H(x(t), p(t), \eta),$$

kde $p(t)$ je řešení adjungované úlohy (21) *s* koncovou *podmínkou*

$$p(T) = \nabla_x g(x(T)). \tag{22}$$

Předpoklady věty zaručují, že pro dané $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ existuje právě jedno $x(t)$ řešení rovnice (18). Adjungovaná rovnice po složkách je

$$p_i' = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x(t), u(t))p_j - \frac{\partial r}{\partial x_i}(x(t), u(t)), \qquad p_i(T) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x(T)).$$

To je lineární rovnice a má tedy – pro daná $x(t)$, $u(t)$ – jediné řešení $p(t)$ na intervalu $[0, T]$.

Příklad 6. Národní hospodářství se řídí rovnicí

$$x' = kxu,$$

kde x je celkový kapitál, $k > 0$ je konstanta vyjadřující přirozenou míru růstu, a

$$u : (0, T) \to [0, 1]$$

vyjadřuje procento reinvestic, tj. $1-u$ je část produkce, která je spotřebována. Cílem je volit u takové, aby *celková* spotřeba

$$P[u(\cdot)] = \int_0^T (1 - u(t))x(t)\, dt$$

byla maximální. Čas $T > 0$ je pevně dán; hodnota $x(T)$ může být libovolná.

Řešení. Ve smyslu zavedeného značení je Hamiltonián roven

$$H = x\big(1 + a(pk - 1)\big).$$

Pontrjaginův princip maxima tedy říká, že v případě optimálního řešení

$$x(t)\big(1 + u(t)(p(t)k - 1)\big) = \max_{\eta \in [0,1]} x(t)\big(1 + \eta(p(t)k - 1)\big).$$

Je rozumné předpokládat $x(0) > 0$, odtud $x(t) > 0$ pro každé $t \geq 0$. Stačí tedy maximalizovat druhou závorku; odsud dedukujeme, že optimální řízení splňuje

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } p(t)k < 1, \\ 1, & \text{pokud } p(t)k > 1. \end{cases}$$

Nyní je třeba určit řešení adjungované úlohy. Protože $\frac{d}{dx}H = 1 + a(pk - 1)$, jde o rovnici

$$p' = \begin{cases} -1, & \text{pokud } p(t)k < 1, \\ -pk, & \text{pokud } p(t)k > 1. \end{cases}$$

Pro naši úlohu je $g = 0$, tedy příslušná koncová podmínka je

$$p(T) = 0.$$

Nyní (postupem pozpátku od $t = T$) dopočítáme, že

$$p(t) = \begin{cases} T - t, & t \in [T - \frac{1}{k}, T], \\ \exp\big(k(T - t) - 1\big), & t < T - \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Celkem dostáváme: pokud $\frac{1}{k} < T$, je optimální volit $u = 1$ pro $t \in [0, T - \frac{1}{k}]$ a $u = 0$ pro $t \in [T - \frac{1}{k}, T]$. V případě $\frac{1}{k} \geq T$ volíme vždy $u = 0$.

Příklad 7. Uvažujme rovnici $x' = x/u$, $x(0) = 1$. Nalezněte nutnou podmínku na $u : [0, T] \to [1, 3]$, aby $P[u(\cdot)] = \int_0^3 x(t)u(t)dt$ bylo maximální.

Řešení. Hamiltonián je $H = x(p/u + u)$. Z linearity rovnice pro x a počáteční podmínky plyne, že $x(t) > 0$; tedy podmínku maxima lze napsat jako

$$\frac{p(t)}{u(t)} + u(t) = \max_{a \in [1,3]} \frac{p(t)}{a} + a.$$

Vyšetřeme průběh funkce $h(a) = \frac{p_0}{a} + a$, $a > 0$, v závislosti na $p_0 \in \mathbb{R}$. Pro $p_0 \leq 0$ je $h(a)$ striktně rostoucí. Pro $p_0 > 0$ je ryze konvexní s globálním minimem v bodě $a = \sqrt{p_0}$. V obou případech je maximum vůči $a \in [1, 3]$ v jednom z krajních bodů intervalu. Dosazením lehce spočteme, že pro $p_0 > 3$ je $a_{max} = 1$, zatímco pro $p_0 < 3$ je $a_{max} = 3$.

Z principu maxima tedy dostáváme, že $u(t) = 1$ pokud $p(t) > 3$, zatímco $u(t) = 3$ pro $p(t) < 3$.

Adjungovaná rovnice má tvar

$$p' = -\frac{p}{u(t)} - u(t), \qquad p(3) = 0,$$

neboť $g = 0$. Řešení sestrojíme opět „odzadu“. Označme

$$t_0 = \inf \left\{ t \in [0, 3];\ p < 3 \text{ na } [t, 3] \right\}.$$

Ze spojitosti je $t_0 < 3$ a patrně $p(t) < 3$ a tedy $u(t) = 3$ na $(t_0, 3]$. Máme tedy rovnici $p' = -p/3 - 3$, jež má obecné řešení $p = ce^{-t/3} - 9$. Z podmínky $p(3) = 0$ plyne $c = 9e$. Celkem máme

$$p = 9e^{1-t/3} - 9, \quad t \in (t_0, 3]. \tag{23}$$

Z definice t_0 dále plyne, že $p(t_0+) = 3$, nebo $t_0 = 0$. Funkce (23) nabývá hodnoty 3 v bodě $t = 3 - 3 \ln 4/3 > 0$, tedy nutně

$$t_0 = 3 - 3 \ln 4/3. \tag{24}$$

Na intervalu $[0, t_0)$ je p patrně klesající a kladná; tedy speciálně zde máme $p > 3$ a $u = 1$. Adjungovaná rovnice přechází na $p' = -p - 1$. Obecné řešení je $p = ce^{-t} - 1$, z podmínky $p(t_0) = 3$ máme $c = 4(3/4)^3 e^3$. Shrnuto

$$p = 4 \left(\frac{4}{3} \right)^3 e^{3-t} - 1, \quad t \in [0, t_0). \tag{25}$$

Podstatná je ovšem informace ohledně optimálního řízení, tedy $u = 1$ na $(0, t_0)$ a $u = 3$ na $(t_0, 3)$. – Zdůrazněme, že jsme pouze ukázali, že existuje-li optimální řízení, má nutně tento tvar. Existence maxima (vzhledem k nelinearitě úlohy) je netriviální problém. Odtud již snadno dopočteme i hodnoty řešení: $x = e^t$ pro $t \in [0, t_0]$ a $x = \frac{16}{9} e^{2+t/3}$ pro $t \in [t_0, 3]$.