Řešte úlohy týkající se pozorovatelnosti.

14. Najděte (co nejjednodušší) příklad matice A takové, aby systém

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \mathrm{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

byl pozorovatelný pouze na základě proměnné x. Případně charakterizujte takové matice.

15. V závislosti na $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, rozhodněte, pro jaká $V \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bude systém $x' = Ax$ pozorovatelný skrze veličinu $y = Vx$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

16. Zkoumejte pozorovatelnost následujících systémů skrze V_1 a V_2:

(a) $x' = y^2$
$y' = x^2$

$V_1 = x - y$
$V_2 = x$

(b) $x' = y^2$
$y' = -x^{-4}$

$V_1 = x \cdot y$
$V_2 = x$

17. Uvažme systém

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= -y/x. \end{aligned}$$

Rozhodněte o jeho pozorovatelnosti veličinou $V = x \cdot y$, budete-li brát v úvahu pouze následující počáteční podmínky (x_0, y_0):

(a) $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{lin}\{e_2\}$

(b) $(x_0, y_0) \in \{(a, a)|\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}\}$

18. Aniž byste se odkazovali na teorii regulací, rozhodněte o pozorovatelnosti rovnice $x''' - x'' + x' - x = 0$ pomocí veličin:

(a) $V = x + x''$

(b) $V = x + x' + x''$

(c) $V = (x + x'')x'$

19. Dokažte, že systém

$$x' = y$$
$$y' = e^x$$

není pozorovatelný skrze veličinu $V = \sin \frac{1}{y}$.

(tip: soustřeďte svou pozornost na případ $y_0 = \sqrt{2e^{x_0}}$)

20. Mějme lineární systém

$$x' = y$$
$$y' = -x,$$
$$(x, y) = (x(t), y(t)), \quad t \in [0, \pi].$$

Vyšetřujte jeho pozorovatelnost pomocí zadaných veličin. V případě nepozorovatelnosti charakterizujte všechna řešení, jež daná veličina vzájemně neodliší.

(a) $V = x^2 + y^2$

(b) $V = x$

(c) $V = x \cdot y$

(d) $V = x(0) \cdot y(0)$

(e) $V = S \cdot (x - y)$,

kde $S = S(t)$ je obsah oblasti vymezené křivkou $\{(x(s), y(s)), \ s \in [0, t]\}$ a spojnicemi jejích krajních bodů s počátkem $(0, 0)$.