Řešení.

14) První řádek $(0, 1, 0)$.

15) Sloupce matic $A(= A^T), A^2, \ldots, A^{n-1}$ jsou násobky vektoru $(1, \ldots, n)$, a proto sloupce $\mathcal{K}(A^T, V^T)$ generují $\mathrm{lin}\{v_1, \ldots, v_m, (1, 2, \ldots, n)\}$, kde v_i jsou řádky matice V. Systém tedy bude pozorovatelný na základě V, právě když $m = n - 1$ a $\{v_1, \ldots, v_m, (1, 2, \ldots, n)\}$ je lineárně nezávislá množina.

16) (a) $x_0 = y_0 \Rightarrow V_1 \equiv 0$, čili systém není pozorovatelný pomocí V_1. Systém je ovšem pozorovatelný pomocí V_2. Můžeme dokazovat sporem ($x^1 \equiv x^2 \wedge y_0^1 \neq y_0^2$), užijeme neklesavost y.

(b) $x_0 = 1/y_0 \Rightarrow V_1 \equiv 1$, a tedy systém není pozorovatelný skrze V_1. Pozorovatelnost na základě V_2 se dokáže obdobně jako pro předchozí systém.

17) (a) $x_0 = 1/y_0 \Rightarrow V_1 \equiv 1$, systém není pozorovatelný.

(b) Při označení $c = (x_0^2 - 1)/x_0$ je řešením uvedeného systému

$$x(t) = \frac{x_0^2 e^{ct} - 1}{c}$$
$$y(t) = \frac{c x_0^2 e^{ct}}{x_0^2 e^{ct} - 1}$$

Z veličiny $V = x \cdot y = x_0^2 e^{ct}$ lze x_0 jednoznačně určit, a proto je systém při uvedených povolených počátečních podmínkách pozorovatelný.

18) $x(t) = c_1 e^t + c_2 \sin t + c_3 \cos t$,
kde $c_{1,2,3} = c_{1,2,3}(x_0, x_0', x_0'')$ je bijekce $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(a) $V = x + x'' = 2c_1 e^t$,
a tedy V nerozlišuje řešení s totožným c_1. Rovnice pomocí V není pozorovatelná.

(b) $V = x + x' + x'' = 3c_1 e^t + c_2 \cos t - c_3 \sin t$,
odkud lze (c_1, c_2, c_3) (proto i (x_0, x_0', x_0'')) jednoznačně určit. Rovnice je skrze V pozorovatelná.

(c) V nedělá rozdíl mezi řešeními s opačnými znaménky, čili rovnice není pomocí V pozorovatelná.

19) Uvažujeme-li případ $y_0 = \sqrt{2e^{x_0}}$, je zadaný systém řešen funkcemi

$$x(t) = \ln\left(\frac{2}{2 - y_0 t}\right)^2 + x_0$$
$$y(t) = \frac{2y_0}{2 - y_0 t}$$

a odtud

$$V = \sin\frac{1}{y} = \sin\left(\frac{1}{y_0} - \frac{t}{2}\right) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2e^{x_0}}} - \frac{t}{2}\right).$$

Zvolíme-li nyní druhou počáteční podmínku jako

$$x_1 = 2\ln\frac{\sqrt{e^{x_0}}}{1 + 2\pi\sqrt{2e^{x_0}}},$$

pak ze sinové periodicity nebudou příslušná řešení skrze V rozlišena.

20) Uvedenou soustavu řeší

$$x(t) = r_0 \sin(t + \omega_0)$$
$$y(t) = r_0 \cos(t + \omega_0),$$

kde $(x(0), y(0)) = (r_0 \sin\omega_0, r_0 \cos\omega_0)$, $r_0 \geq 0$, $\omega_0 \in [0, 2\pi)$. Vzhledem k omezení definičního oboru na interval $[0, \pi]$ je grafem půlkružnice se středem v počátku, vykreslovaná konstantní rychlostí v záporném směru.

(a) nepozorovatelnost
Všechna řešení s totožnou hodnotou r_0 splývají.

(b) pozorovatelnost
Pomocí teorie regulací nebo elementární úvahou.

(c) pozorovatelnost
$V = \frac{r_0^2}{2}\sin(2t+2\omega_0)$, odkud jsme na intervalu $[0, \pi]$ schopni jednoznačně vyčíst (r_0, ω_0).

(d) nepozorovatelnost
Splývají řešení splňující $(x(0), y(0)) = (x(0), V/x(0))$ pro $V \neq 0$ a s počáteční podmínkou na osách x, y pro $V = 0$.

(e) pozorovatelnost
$S(t) = \frac{r_0^2}{2}t$ a užitím součtového vzorce dostaneme

$$V = -\frac{r_0^3}{\sqrt{2}}t\cos\left(t + \omega_0 + \frac{\pi}{4}\right),$$

odkud jsme na $[0, \pi]$ s to jednoznačně určit (r_0, ω_0).